ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 01
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
29 ΜΑΡΤΙΟΥ 2020

Α ΘΕΜΑ

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε οτι και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει οτι : $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$ (μονάδες 6)

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $-\infty$. (μονάδες 2)

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat. (μονάδες 3)

Α4. Έστω ο παρακάτω ισχυρισμός:
«Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.»
α. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως αληθή (Α), ή ψευδή (Ψ).
β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.** (μονάδες 2+2)

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ), ή λάθος (Λ)

α. Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της f με τη g δεν ορίζεται, αν $f(\mathrm{A})\cap\mathrm{B}=\varnothing$.

β. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

γ. Κάθε συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$ συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]\subseteq\Delta$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα, τότε εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle, σε κάποιο υποσύνολο $[\alpha,\beta]$, του πεδίου ορισμού της.

ε. Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, με $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$. (μονάδες 2x5)

Β ΘΕΜΑ

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, με f'' συνεχή , για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h)+2f(-h)-3}{h^2}=3\cdot f(x)\cdot \text{συν}x$,(1) για κάθε $x\in \mathrm{A}=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και $f(0)=f''(0)=1$.

Β1. Να δείξετε οτι $f(x)=\frac{1}{\text{συν}x},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{A}$ (μονάδες 7)

Β2.i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

ii. Να δείξετε οτι το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathrm{A})=[1,+\infty)$ (μονάδες 3+4)

Β3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+e^{x^2}=2$ (μονάδες 6)

Β4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να κάνετε τη γραφική της παράσταση. (μονάδες 5)

Β5. Να δείξετε οτι υπάρχει σημείο της C_f με τετμημένη $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια να δείξετε οτι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_1=-x_0$, επίσης διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (προαιρετικά)

Γ ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $f(\ln 2)=1$ και $f(x)\cdot f'(x)=\frac{1+f^2(x)}{2}$, για κάθε $x>0$

Γ1.i. Να δείξετε οτι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (μονάδες 3)

ii. Να δείξετε οτι $f(x)=\sqrt{e^x-1},\ x\in[0,+\infty)$ (μονάδες 4)

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{e^x-1}+\ln 2=x+1$ (μονάδες 7)

Γ3. Να δείξετε οτι στο διάστημα $(0,\ln 2)$ υπάρχει μοναδικό ξ , τέτοιο ώστε $f(\xi)=\frac{e^{\xi}\cdot\ln 2}{2}$ (μονάδες 6)

Γ4. Υλικό σημείο $\mathrm{M}(x,f(x))$ ξεκινά από την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$ και κινείται επί της C_f , με την τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2cm/s$. Αν K είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMK , τη χρονική στιγμή που το υλικό σημείο διέρχεται από το $(\ln 2,1)$. (μονάδες 5)

Γ5. Έστω $g(x)=\ln x,\ x>0$. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$ και να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left[(f\circ g)(x)\right]^{(f\circ g)(x)}-\etaμ(x-1)}{x^2+x-2}$$ (προαιρετικά)

Δ ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει οτι $e^{f(x)}+\ln f(x)+f(x)=x-2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.(1)

Δ1. Να δείξετε οτι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (μονάδες 5)

Δ2.i. Να δείξετε οτι $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$ (μονάδες 5)

ii. Να δείξετε οτι ορίζεται η f^{-1} και είναι $f^{-1}(x)=e^x+\ln x+x+2,\ x>0$ (μονάδες 3)

Έστω $h=f^{-1}$

Δ3.i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{h(x)-e-3}{(x-1)\cdot h(x-1)}$ (μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $h(e^x)>e^{x^2+1}+\ln(x^2+1)+x^2+3$ (μονάδες 3)

Δ4. Για $\alpha>1$, να δείξετε οτι ισχύει $h(x)>(e+2)\cdot(x-\alpha)+h(\alpha)$, για κάθε $x\in(\alpha,+\infty)$ (μονάδες 5)

ΕΙΣΗΓΗΣΗ-ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Ν. ΨΑΘΑ

Καλή επιτυχία