ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 01
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
29 ΜΑΡΤΙΟΥ 2020

ΛΥΣΕΙΣ

Α ΘΕΜΑ

Α1. Για $x \neq x_0$, ισχύει: $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} =$

$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$.

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$

Α2. Η ευθεία $y=\lambda x+\beta,\ \lambda,\beta\in\mathbb{R}$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παραάστασης της f στο $-\infty$, αν $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

Α4. **α.** (Α). **β.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$. Για οποιαδήποτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}$, αλλά ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=1$ Επομένως δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών για την f .

Α5. **α.** Σ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Λ

Β ΘΕΜΑ

Β1. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, με f'' συνεχή ,άρα είναι και συνεχής, με f' συνεχή. Έτσι $\lim_{h\to0}\frac{f(2h)+2f(-h)-3}{h^2} \underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{h\to0}\frac{2f'(2h)-2f'(-h)}{2h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f'(2h)-f'(-h)}{h} \underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{h\to 0}\left(2f''(2h)+f''(-h)\right) \overset{f''\ \text{συν}}{=} 2f''(0)+f''(0)=$$

$=3f''(0)=3\cdot 1=3$. Τότε από τη δοσμένη σχέση (1) προκύπτει οτι ισχύει : $3=3\cdot f(x)\cdot \text{συν}x \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{\text{συν}x}$, $x\in \mathrm{A}=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

B2.i. Η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγιες, ή οριζόντιες ασύμπτωτες, εφόσον είναι $\mathrm{A}=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Το $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{\text{συν}x}=+\infty$, εφόσον $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\text{συν}x=0$ και $\text{συν}x>0$ για $x>-\frac{\pi}{2}$ κοντά στο $-\frac{\pi}{2}$. Άρα η ευθεία $x=-\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Το $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\text{συν}x}=+\infty$, εφόσον $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\text{συν}x=0$ και $\text{συν}x>0$ για $x<\frac{\pi}{2}$, κοντά στο $\frac{\pi}{2}$. Άρα η ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$ είναι επίσης κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής. Για κάθε $x\in \mathrm{A}=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, είναι $f'(x)=\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}^2 x}$

Ο πίνακας προσήμων της $f'(x)$ και μεταβολών της συνάρτησης f είναι:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$

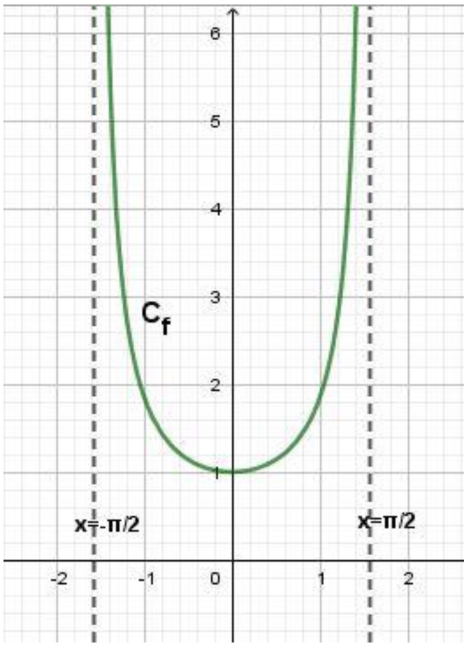
Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\mathrm{A}_1=\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$, γνησίως αύξουσα στο $\mathrm{A}_2=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$, το $f(0)=1$

Τα σύνολα των τιμών της f στα διαστήματα A_1 και A_2 είναι αντίστοιχα: $f(\mathrm{A}_1)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)\right)=[1,+\infty)$ και $f(\mathrm{A}_2)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right)=[1,+\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(\mathrm{A})=f(\mathrm{A}_1)\cup f(\mathrm{A}_2)=[1,+\infty)$.

B3. Η εξίσωση $f(x)+e^{x^2}=2$ ορίζεται στο $\mathrm{A}=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Για κάθε $x\in \mathrm{A}=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x)\geq 1$, με $f(x)=1\Leftrightarrow x=0$. Επίσης, $e^{x^2}\geq 1$, με $e^{x^2}=1\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$. Επομένως, για κάθε $x\in \mathrm{A}=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\{0\}$, είναι $f(x)+e^{x^2}>2$, ενώ η εξίσωση $f(x)+e^{x^2}=2\Leftrightarrow x=0$.

B4. . Για κάθε $x \in \mathrm{A} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι

$f''(x) = \frac{\text{συν}x \cdot \text{συν}^2 x + 2 \cdot \text{ημ}^2 x \cdot \text{συν}x}{\text{συν}^4 x} = \frac{\text{συν}^2 x + 2 \cdot \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^3 x} = \frac{1 + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^3 x} > 0$, επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή. Σύμφωνα με την παραπάνω μελέτη , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:



B5. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Η ευθεία (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αν και μόνο αν ισχύει $-f(x_0) = f'(x_0) \cdot (-x_0) \Leftrightarrow \frac{1}{\text{συν}x_0} = \frac{x_0 \cdot \text{ημ}x_0}{\text{συν}^2 x_0} \Leftrightarrow \text{συν}x_0 - x_0 \cdot \text{ημ}x_0 = 0 \quad (2)$.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = \text{συν}x - x \cdot \text{ημ}x,\ x \in \mathbb{R}$. Τότε η σχέση $(2) \Leftrightarrow \varphi(x_0) = 0$.

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Επίσης είναι $\varphi(0) = 1 > 0$ και $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \left(\sqrt{3} - \pi\right) < 0$

εφόσον $\pi > 3 > \sqrt{3}$. Άρα είναι $\varphi(0) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$.

Τότε, από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$

Επίσης η συνάρτηση φ είναι συνεχής και στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$.

Το $x_1 = -x_0 \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ και ισχύει οτι

$\varphi(x_1) = \text{συν}x_1 - x_1 \cdot \text{ημ}x_1 = \text{συν}(-x_0) + x_0 \cdot \text{ημ}(-x_0) = \text{συν}x_0 - x_0 \cdot \text{ημ}x_0 = \varphi(x_0) = 0$. Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_1 = -x_0$, επίσης διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Γ ΘΕΜΑ

Γ1.i. Για κάθε $x>0$, ισχύει $f(x)\cdot f'(x)=\dfrac{1+f^2(x)}{2}>0$, άρα $f'(x)\neq 0$ και $f(x)\neq 0$ και συνεχής. Επομένως η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$. Είναι και $f(\ln 2)=1>0$, επομένως είναι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

ii. Για κάθε $x>0$, είναι $f(x)\cdot f'(x)=\dfrac{1+f^2(x)}{2}\Leftrightarrow 2f(x)\cdot f'(x)=1+f^2(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(1+f^2(x)\right)'=1+f^2(x)\Leftrightarrow$ υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε για κάθε $x>0$, $1+f^2(x)=c\cdot e^x$. Για $x=\ln 2$ προκύπτει $2=2\cdot c\Leftrightarrow c=1$. Άρα για κάθε $x>0$,

$1+f^2(x)=e^x\Leftrightarrow f^2(x)=e^x-1>0\Leftrightarrow|f(x)|=\sqrt{e^x-1}\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)=\sqrt{e^x-1}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και στο 0 , άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{e^x-1}=0$.

Τελικά, είναι $f(x)=\sqrt{e^x-1},\ x\in[0,+\infty)$

Γ2. Για κάθε $x>0$, είναι $f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$, άρα

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x\cdot\sqrt{e^x-1}-e^x\cdot\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}}{e^x-1}=$$

$$=\frac{e^x}{2}\cdot\frac{2e^x-2-e^x}{2\sqrt{e^x-1}\cdot\left(e^x-1\right)}=\frac{e^x\cdot\left(e^x-2\right)}{4\sqrt{e^x-1}\cdot\left(e^x-1\right)}.$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι :

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f''(x)$	−	0	+
f		σ.κ.	

Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(0,\ln 2]$, κυρτή στο $[\ln 2,+\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο $x_0=\ln 2$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $(\ln 2,1)$ είναι: $(\varepsilon): y-f(\ln 2)=f'(\ln 2)\cdot(x-\ln 2)\Leftrightarrow(\varepsilon): y=x+1-\ln 2$.

Από τη μελέτη της κυρτότητας της f προκύπτει οτι η C_f είναι κάτω από την (ε) στο διάστημα $(0,\ln 2)$, επομένως είναι $f(x)<x+1-\ln 2\Leftrightarrow\sqrt{e^x-1}+\ln 2<x+1$, για κάθε $x\in(0,\ln 2)$. Ομοίως, η C_f είναι πάνω από την (ε) στο διάστημα $(\ln 2,+\infty)$, οπότε είναι $f(x)>x+1-\ln 2\Leftrightarrow\sqrt{e^x-1}+\ln 2>x+1$, για κάθε $x\in(\ln 2,+\infty)$. Επομένως τελικά, η εξίσωση $\sqrt{e^x-1}+\ln 2=x+1\Leftrightarrow f(x)=x+1-\ln 2\Leftrightarrow x=\ln 2$.

Γ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\ln 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\ln 2)$. Άρα, από το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi\in(0,\ln 2)$, τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(\ln 2)-f(0)}{\ln 2}=\dfrac{1}{\ln 2}\Leftrightarrow \dfrac{e^{\xi}}{2\cdot f(\xi)}=\dfrac{1}{\ln 2}\Leftrightarrow f(\xi)=\dfrac{e^{\xi}\cdot \ln 2}{2}$. Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(0,\ln 2]$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα σ΄αυτό. Άρα στο διάστημα $(0,\ln 2)$ υπάρχει μοναδικό ξ , τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{e^{\xi}\cdot \ln 2}{2}$.

Γ4. Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου OMK δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}=\dfrac{x\cdot f(x)}{2}=\dfrac{x\cdot\sqrt{e^{x}-1}}{2},\ x>0$. Όταν η τετμημένη του σημείου M μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε και το εμβαδόν του τριγώνου μεταβάλλεται με το χρόνο, άρα είναι $\mathrm{E}(t)=\dfrac{x(t)\cdot\sqrt{e^{x(t)}-1}}{2},\ x(t)>0$. Επομένως ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι

$\mathrm{E}'(t)=\dfrac{x'(t)\cdot\sqrt{e^{x(t)}-1}+x(t)\cdot\dfrac{e^{x(t)}\cdot x'(t)}{2\cdot\sqrt{e^{x(t)}-1}}}{2},\ x(t)>0$. Άρα τη χρονική στιγμή t_0 , που είναι $x(t_0)=\ln 2\ cm$ και $x'(t_0)=2cm/s$, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι

$$\mathrm{E}'(t_0)=\frac{\sqrt{e^{x(t)}-1}+x(t_0)\cdot\dfrac{e^{x(t_0)}}{2\cdot\sqrt{e^{x(t_0)}-1}}}{2}\cdot x'(t_0)=\frac{1+\ln 2\cdot\dfrac{2}{2\cdot 1}}{2}\cdot 2=1+\ln 2\ cm^2/s .$$

Γ5. Το σύνολο $\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=\{x>0\,/\,\ln x\geq 0\}=[1,+\infty)\neq\varnothing$, άρα ορίζεται στο διάστημα $[1,+\infty)=D_{f\circ g}$ η συνάρτηση $f\circ g$, με τύπο

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\ln x)=\sqrt{e^{\ln x}-1}=\sqrt{x-1}$.

Το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left[(f\circ g)(x)\right]^{(f\circ g)(x)}-\etaμ(x-1)}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}^{\sqrt{x-1}}-\etaμ(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}$ ορίζεται στο $(1,+\infty)$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}^{\sqrt{x-1}}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}^{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}^{\sqrt{x-1}-2}\overset{u=\sqrt{x-1}}{=}$

$=\lim\limits_{u\to 0^+}u^{u-2}=\lim\limits_{u\to 0^+}e^{\ln u^{u-2}}=\lim\limits_{u\to 0^+}e^{(u-2)\ln u}=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{u\to 0^+}(u-2)\ln u=-2\cdot(-\infty)=+\infty$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\etaμ(x-1)}{x-1}\overset{t=x-1}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\etaμ t}{t}=1$.

Επομένως, το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left[(f\circ g)(x)\right]^{(f\circ g)(x)}-\etaμ(x-1)}{x^2+x-2}=$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x+2}\cdot\left(\sqrt{x-1}^{\sqrt{x-1}-2}-\frac{\etaμ(x-1)}{(x-1)}\right)\right]=\frac{1}{3}\cdot\left((+\infty)-1\right)=+\infty$$

Δ ΘΕΜΑ

Δ1. Έστω οτι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2) > 0$, άρα $\ln f(x_1) \geq \ln f(x_2)$ και $e^{f(x_1)} \geq e^{f(x_2)}$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες προκύπτει οτι $e^{f(x_1)} + \ln f(x_1) + f(x_1) \geq e^{f(x_2)} + \ln f(x_2) + f(x_2) \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1 - 2 \geq x_2 - 2 \Rightarrow$ $x_1 \geq x_2$: άτοπο, γιατί $x_1 < x_2$. Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β΄ τρόπος

Έστω η συνάρτηση

$g(x) = e^x + \ln x + x + 2,\ x \in (0, +\infty)$.. Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) = e^x + \dfrac{1}{x} + 1 > 0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

Έτσι, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, είναι $f(x_1), f(x_2) > 0$ και από τη σχέση (1) προκύπτει οτι : $e^{f(x_1)} + \ln f(x_1) + f(x_1) + 2 < e^{f(x_2)} + \ln f(x_2) + f(x_2) + 2 \Leftrightarrow$

$g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2.i. Η συνάρτηση $g(x) = e^x + \ln x + x + 2,\ x \in (0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathrm{A} = (0, +\infty)$.

Άρα $g(\mathrm{A}) = (\lim\limits_{x \to 0} g(x), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Επίσης η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, επομένως ορίζεται η αντίστροφή της, με $D_{g^{-1}} = g(\mathrm{A}) = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f(x) > 0$ και τότε, $g(f(x)) = e^{f(x)} + \ln f(x) + f(x) + 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(f(x)) = x \Leftrightarrow g^{-1}(x) = f(x)$, άρα $g^{-1} = f$. Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το ίδιο με το σύνολο τιμών της g^{-1}, δηλαδή το $\mathrm{A} = (0, +\infty)$. Άρα $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

β΄τρόπος

Έστω τυχαίο $y_0 > 0$. Τότε για $x_0 = e^{y_0} + \ln y_0 + y_0 + 2 \in \mathbb{R}$, από την σχέση (1) είναι και $e^{f(x_0)} + \ln f(x_0) + f(x_0) + 2 = x_0$, οπότε προκύπτει $e^{f(x_0)} + \ln f(x_0) + f(x_0) + 2 =$ $e^{y_0} + \ln y_0 + y_0 + 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow g(f(x_0)) = g(y_0) \overset{g\,1-1}{\Leftrightarrow} f(x_0) = y_0$. Άρα $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

ii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι και $1-1$, οπότε ορίζεται η αντίστροφή της και ισχύουν $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, $\mathrm{g}^{-1} = f \Leftrightarrow f^{-1} = g$, άρα $f^{-1}(x) = e^x + \ln x + x + 2,\ x \in (0, +\infty)$

Δ3.i. Είναι $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x-1) \overset{u = x-1}{=} \lim\limits_{u \to 0^+} h(u) = -\infty$, άρα $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{h(x-1)} = 0$. Επίσης είναι

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{h(x) - e - 3}{x - 1} \underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 1^+} h'(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(e^x + \frac{1}{x} + 1 \right) = e + 2 .$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{h(x)-e-3}{(x-1)\cdot h(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{h(x-1)}\cdot\dfrac{h(x)-e-3}{x-1}\right)=0\cdot(e+2)=0$

ii. Για κάθε $x>0$, είναι $h'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}+1>0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα.

Η ανίσωση $h\left(e^x\right)>e^{x^2+1}+\ln\left(x^2+1\right)+x^2+3$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι ισοδύναμη με την $h\left(e^x\right)>h\left(x^2+1\right)\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}e^x>x^2+1\Leftrightarrow\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)\cdot e^{-x}<1\ (2)$.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\left(x^2+1\right)\cdot e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $\varphi(0)=1$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\varphi'(x)=2x\cdot e^{-x}-\left(x^2+1\right)\cdot e^{-x}=-(x-1)^2\cdot e^{-x}\leq 0$,

με $\varphi'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ μόνο. Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε η σχέση $(2)\Leftrightarrow\varphi(x)<\varphi(0)\Leftrightarrow x>0$

Δ4. Για κάθε $x>0$, είναι $h''(x)=e^x-\dfrac{1}{x^2}$.

α΄τρόπος. Έτσι, για $x\geq 1\Leftrightarrow e^x\geq e$ και $x^2\geq x\geq 1\Rightarrow\dfrac{1}{x^2}\leq 1\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x^2}\geq-1$, άρα $e^x-\dfrac{1}{x^2}\geq e-1>0\Rightarrow h''(x)>0$.

β΄τρόπος. Για κάθε $x>0$ είναι $h^{(3)}(x)=e^x+\dfrac{2}{x^3}>0$, άρα η συνάρτηση h'' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x\geq 1\Rightarrow h''(x)\geq h''(1)=e-1>0\Rightarrow h''(x)>0$

Άρα η συνάρτηση h είναι κυρτή στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Για $\alpha>1$, και $x\in(\alpha,+\infty)$, η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,x]$ και παραγωγίσιμη στο (α,x) . Τότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $\xi\in(\alpha,x)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=\dfrac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$.

Η συνάρτηση h είναι κυρτή στο διάστημα $[1,+\infty)$ άρα η συνάρτηση h' είναι γνησίως αύξουσα σ΄αυτό. Έτσι, $1<\alpha<\xi<x\Rightarrow h'(1)<h'(\xi)\Leftrightarrow e+2<\dfrac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(x)>(e+2)\cdot(x-\alpha)+h(\alpha)$

ΕΙΣΗΓΗΣΗ-ΛΥΣΕΙΣ-ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Ν. ΨΑΘΑ