ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ (2)

Απρίλιος 2020 (νέα ύλη)
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Β ΘΕΜΑΤΑ

04 Β

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει οτι $x\cdot f'(x)+\ln x=1+f(x)$, (1) για κάθε $x>0$. Η γραφική της παράσταση εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): y=2x-1$.

Β1.i. Να δείξετε οτι $f(1)=1$ **ii.** Να δείξετε οτι $f(x)=\ln x+x,\ x>0$

Β2. Να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(x^2+2x\right)+x^2>\ln(x+2)-x+2$

Β3. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(2^x\right)+f\left(4^x\right)=f\left(5^x\right)+f\left(3^x\right)$

Β4. Να υπολογίσετε τα **i.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\text{συν}(x-1)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(f(x)-1\right)}$ και **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(e^x\right)-x-2^x}{3^x+1}$

Β5. Να δείξετε οτι υπάρχει μοναδικό $x_0>0$, τέτοιο ώστε $\ln\dfrac{1}{x_0}=x_0$

Β6. Να δείξετε οτι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(x,x+1)$, με $x>0$, τέτοιο ώστε $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\xi}=1$

05Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$, όπου $\mathrm{A}=(-\pi,\pi)$, για την οποία ισχύει $e^{f(x)}\cdot\text{συν}x=\left(e^{f(x)}-e\right)\cdot\text{συν}\pi$, για κάθε $x\in\mathrm{A}$

Β1.i. Να δείξετε οτι $f(x)=1-\ln(1+\text{συν}x),\ x\in\mathrm{A}$

ii. Να δείξετε οτι $f(x)>0$, για κάθε $x\in \mathrm{A}$

B2. Να δείξετε οτι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία της με αντίθετες τετμημένες, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$

B3. Να λύσετε στο $(-\pi,\pi)$ την ανίσωση $\sqrt{3}\cdot \etaμx>1+συνx$

B4. Να υπολογίσετε τα **i.** $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{f(x)\cdot f'(x)}{ημx}$ και **ii.** $\lim\limits_{x\to \pi}\left(f(x)\cdot σφx\right)$

06B

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x+3}-2}, & 0\le x<1\\ \gamma, & x=1\\ \dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+x-2}, & x>1\end{cases}$, με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

B1. Να δείξετε οτι $\alpha+1=-\beta=11,\ \gamma=4$ και να απλοποιήσετε τον τύπο της f

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

B3. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^{x-1}+1-x\right)=x^2-2x+5$

B4. Να δείξετε οτι για κάθε $x>1$, ισχύει $f(x)<(x-1)\cdot f'(x)+4$

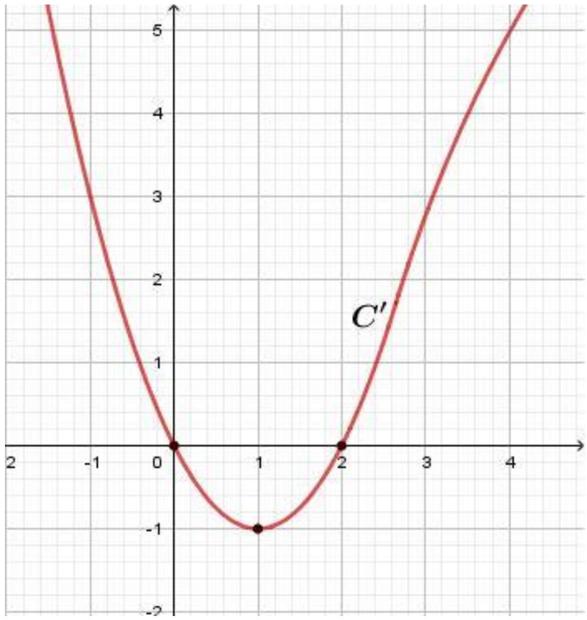
B5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, που διέρχεται από το σημείο $\left(0,\dfrac{7}{2}\right)$ και εφάπτεται στη C_f , σε σημείο της με τετμημένη $x_0>1$

B6. Ένα υλικό σημείο $\mathrm{M}(x,f(x))$, με $x>1$, ξεκινά από το σημείο $\mathrm{A}(1,f(1))$ και κινείται επί της C_f , με $x'(t)=2\ \mu/s$. Έστω K η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής το εμβαδού του τριγώνου OMK , όπου $\mathrm{O}(0,0)$ τη χρονική στιγμή που το υλικό σημείο διέρχεται από το σημείο $(4,f(4))$

Β7. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \etaμx, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ και να λύσετε την ανίσωση $(f \circ g)^2(x) < f^2\left(\frac{1}{2}\right)$

07B

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C', της παραγώγου f', μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει οτι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $f(0) \cdot f(2) < 0$.



Β1. Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f και να γράψετε τα συμπεράσματά σας για τη μονοτονία και τις θέσεις ακροτάτων της.

Β2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$

Β3. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση f σε κάποιο υποσύνολο του $(-\infty, 2]$

Β4. Να δείξετε οτι υπάρχει εφαπτομένη της C' η οποία είναι παράλληλη στη διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

Β5. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια **i.** $\lim_{x\to1} \frac{1}{(f'(x)+1) \cdot \etaμ(x-1)}$ και

ii. $\lim_{x\to1} \frac{f'(x)+1}{x-1}$

Γ ΘΕΜΑΤΑ

05 Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x+\beta\sqrt{x}+1}{x-1}, & x\in[0,1)\cup(1,+\infty)\\ 0\ , & x=1\end{cases}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε οτι $\alpha=1,\ \beta=-2$ και η f γράφεται $f(x)=1-\dfrac{2}{\sqrt{x}+1},\ x\geq 0$

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ3. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(1,0)$ και να εξετάσετε αν έχει άλλα κοινά σημεία με τη C_f

Γ4.i. Να δείξετε οτι ορίζεται η αντίστροφη της f και να ορίσετε την f^{-1}

ii. Να δείξετε οτι η $C_{f^{-1}}$ δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $(\varepsilon): y=\dfrac{1}{4}(x-1)$

Γ5. Να δείξετε οτι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0>1$, τέτοιο ώστε $f(x_0)+x_0\cdot\ln x_0=1$

Γ6.i. Να δείξετε οτι η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα και οτι ισχύει $4f'\left(f(x)+x\cdot\ln x\right)<1\Leftrightarrow x>x_0$, για το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος

ii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{f(x)+x\cdot\ln x-1}$

06 Γ

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{e^{x-1}}{e^{x-1}+2},\ x\in\mathbb{R}$ και συνάρτηση $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει οτι $(g\circ f)(x)=\dfrac{x+1}{x+3},\ x\in(-1,+\infty)$

Γ1. Να δείξετε οτι $f(x)=1+\ln(x+1),\ x>-1$ και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

Γ2. Να υπολογίσετε τα **i.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|f^2(x)-2f(x)-3\right|+g(x)}{f(x)}$ και

ii. $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{1}{f(x)}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{(g\circ f)(x)}\right)$

Γ3. Να δείξετε οτι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δυο κοινά σημεία με την ευθεία $y=x$

Γ4. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$. Ένα υλικό σημείο $M(x,y)$ ξεκινά από το σημείο A και κινείται στην (ε), με $x(t)>0$ και $x'(t)=2\ \mu/s$. Η κάθετη από το σημείο M προς τον άξονα $x'x$, τέμνει τη C_f στο σημείο K. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AMK, τη χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το σημείο $(2,3)$

07 Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1)=\dfrac{1}{2}$ και $x\cdot f(x)-\alpha\cdot\sqrt{x^2+3}=f(x)+\beta \quad (1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ σταθερούς συντελεστές

Γ1. Να δείξετε οτι $\alpha=1$ και $\beta=-2$

Γ2.i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

ii. Να δείξετε οτι ορίζεται η f^{-1} και να λύσετε στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ την ανίσωση $f^{-1}(\eta\mu x)<1$

Γ3. Να δείξετε οτι η C_f είναι πάνω από την ευθεία $y=-1$ κοντά στο $-\infty$ και να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x}{f(x)+1}$

Γ4. Να δείξετε οτι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y=\frac{1}{4}\cdot x+3$

08 Γ

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{\lambda-2}{\sqrt{x^2+(\lambda-1)\cdot x+\lambda+2}}$, με $\lambda\in\mathbb{R}$

Γ1. Να προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

Για $\lambda=3$

Γ2.i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να δείξετε οτι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

ii. Να δείξετε οτι η εξίσωση $f(x)=\eta\mu x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $\mathbb{R}$

Γ3. Να δείξετε οτι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις $e^{\frac{f(x)-1}{\ln f(x)}}>1$, (1) και $\ln\left(\frac{f(x)-1}{\ln f(x)}\right)<0,\quad(2)$

Γ4. Έστω η συνάρτηση $g(x)=2\varepsilon\varphi x-1,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

i. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$

ii. Να εξετάσετε αν από το σημείο $(0,1)$ διέρχεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f\circ g$

Δ ΘΕΜΑΤΑ

04 Δ

Έστω η συνάρτηση $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει την ευθεία $y=x$, μόνο στο σημείο με τετμημένη $\frac{\pi}{2}$ και για κάθε $x\in(0,\pi)$ ισχύει $f'(x)+\sigma\varphi^2 x=0\ (1)$

Δ1. Να δείξετε οτι $f(x)=\sigma\varphi x+x,\ x\in(0,\pi)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Δ2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f^2\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{\eta\mu 2h}$.

Δ3. Να δείξετε οτι η εξίσωση $2\eta\mu^3 x=\pi\cdot\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

Δ4. Έστω η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-4f(x)+2$.

Να υπολογίσετε τα όρια **i.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ και **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu f'(x)}{g(x)}$

Ο υπολογισμός όλων των ορίων να γίνει χωρίς χρήση των κανόνων De L' Hospital.

05Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $[1,+\infty)$, για την οποία ισχύει $f'(x)=\dfrac{x}{f(x)}$, (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε οτι $f(0)=1$ και στη συνέχεια οτι $f(x)=\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$

Δ2. Υλικό σημείο $\mathrm{M}(x, f(x))$, με $x>0$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $\sqrt{2}\ \mu/s$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω , που σχηματίζει η ημιευθεία OM, όπου O η αρχή των αξόνων, με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή που το σημείο M διέρχεται από το $(1, f(1))$

Δ3. Να δείξετε οτι υπάρχουν δυο εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το σημείο $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\sigma\varphi x,\ x\in(0,\pi)$

Δ4.i. Να δείξετε οτι $(f\circ g)(x)=\frac{1}{\eta\mu x},\ x\in(0,\pi)$ και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση $(f\circ g)(x)+e^{(2x-\pi)^2}\leq 2$

ii. Να δείξετε οτι για κάθε $x\in(1,2)$ ισχύει $\frac{2}{\eta\mu x}<\frac{1}{\eta\mu(x-1)}+\frac{1}{\eta\mu(x+1)}$

Δ5. Να υπολογίσετε τα **i.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[(f\circ g)(x)\cdot(f(x)-1)\right]$ και **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|f(x)-\eta\mu x|-1}{x}$

ΛΥΣΕΙΣ

04Β

Β1.i. Η γραφική παράσταση της C_f εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): y=2x-1$, άρα υπάρχει σημείο $(x_1, f(x_1))$, τέτοιο ώστε $f(x_1)=2x_1-1$ και $f'(x_1)=2$. Τότε από τη σχέση (1) προκύπτει $x_1\cdot f'(x_1)+\ln x_1=1+f(x_1)\Leftrightarrow 2x_1+\ln x_1=1+2x_1-1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln x_1=0\Leftrightarrow x_1=1$. Άρα $f(1)=1$

ii. Για κάθε $x>0$, η σχέση $(1)\Leftrightarrow x\cdot f'(x)-f(x)=1-\ln x\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x\cdot f'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'\Leftrightarrow$ υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε για κάθε $x>0$, $\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x}{x}+c$. Για $x=1$ προκύπτει $c=1$. Άρα $\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x}{x}+1 \Leftrightarrow f(x)=\ln x+x,\ x>0$

B2. Η ανίσωση $\ln\left(x^2+2x\right)+x^2>\ln(x+2)-x+2$ ορίζεται στο σύνολο $\left\{x\in\mathbb{R} / x^2+2x>0 \text{ και } x+2>0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} / x(x+2)>0 \text{ και } x+2>0\right\}=(0,+\infty)$. Στο $(0,+\infty)$ η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα $\ln\left(x^2+2x\right)+x^2+2x>\ln(x+2)+x+2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f\left(x^2+2x\right)>f(x+2)\ (2)$.

Για κάθε $x>0$, είναι $f'(x)=\frac{1}{x}+1>0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Τότε η προηγούμενη σχέση $(2)\Leftrightarrow x^2+2x>x+2$ και $x>0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2+x-2>0,\ x>0 \Leftrightarrow (x<-2, \text{ ή } x>1)$ και $x>0$, άρα $x>1$.

B3. Η εξίσωση $f\left(2^x\right)+f\left(4^x\right)=f\left(5^x\right)+f\left(3^x\right)$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$, εφόσον είναι $2^x>0,\ 3^x>0,\ 4^x>0,\ 5^x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Το $x=0$ είναι λύση της εξίσωσης, γιατί την επαληθεύει.

Για κάθε $x<0 \overset{\left(\frac{2}{3}\right)^x\downarrow}{\Leftrightarrow} \left(\frac{2}{3}\right)^x>\left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x}>1 \Leftrightarrow 2^x>3^x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(2^x\right)>f\left(3^x\right)$ και

$\overset{\left(\frac{4}{5}\right)^x\downarrow}{\Leftrightarrow} \left(\frac{4}{5}\right)^x>\left(\frac{4}{5}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{4^x}{5^x}>1 \Leftrightarrow 4^x>5^x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(4^x\right)>f\left(5^x\right)$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $f\left(2^x\right)+f\left(4^x\right)>f\left(3^x\right)+f\left(5^x\right)$

Για κάθε $x>0 \overset{\left(\frac{2}{3}\right)^x\downarrow}{\Leftrightarrow} \left(\frac{2}{3}\right)^x<\left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x}<1 \Leftrightarrow 2^x<3^x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(2^x\right)<f\left(3^x\right)$ και

$\overset{\left(\frac{4}{5}\right)^x\downarrow}{\Leftrightarrow} \left(\frac{4}{5}\right)^x<\left(\frac{4}{5}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{4^x}{5^x}<1 \Leftrightarrow 4^x<5^x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(4^x\right)<f\left(5^x\right)$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $f\left(2^x\right)+f\left(4^x\right)<f\left(3^x\right)+f\left(5^x\right)$.

Επομένως, μοναδική λύση της εξίσωσης, είναι το $x=0$.

B4.i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και $f(1)=1$. Άρα για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f(x)<1\Leftrightarrow f(x)-1<0$ και $\sqrt{x}<1\Leftrightarrow \sqrt{x}-1<0$, άρα $\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(f(x)-1\right)>0$

Ομοίως, για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f(x)>1\Leftrightarrow f(x)-1>0$ και $\sqrt{x}>1\Leftrightarrow\sqrt{x}-1>0$ άρα $\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(f(x)-1\right)>0$.

Επομένως, για κάθε $x\neq1$, κοντά στο 1, είναι $\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(f(x)-1\right)>0$ και $\lim\limits_{x\to1}\left[\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(f(x)-1\right)\right]=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(f(x)-1\right)}=+\infty$.

Τότε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x-1)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(f(x)-1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(f(x)-1\right)}\cdot\sigma\upsilon\nu(x-1)\right]=(+\infty)\cdot1=+\infty$

ii. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(e^x\right)-x-2^x}{3^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+e^x-x-2^x}{3^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-2^x}{3^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\cdot\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^x\right)}{3^x\cdot\left(1+3^{-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{e}{3}\right)^x\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1+3^{-x}}\right]=0\cdot\frac{1-0}{1+0}=0$$

Β5. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα και στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$. Είναι $f\left(\frac{1}{e}\right)=-1+\frac{1}{e}=\frac{1-e}{e}<0$ και $f(1)=1>0$, άρα $f\left(\frac{1}{e}\right)\cdot f(1)<0$.

Επομένως, από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0\Leftrightarrow \ln x_0+x_0=0\Leftrightarrow -\ln x_0=x_0\Leftrightarrow \ln\frac{1}{x_0}=x_0$. Λόγω της μονοτονίας της f το x_0 αυτό, είναι μοναδικό στο $(0,+\infty)$

β΄τρόπος. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα το σύνολο τιμών της είναι $f\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to0}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Το $0\in f\left((0,+\infty)\right)=\mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0>0$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0\Leftrightarrow \ln x_0+x_0=0\Leftrightarrow -\ln x_0=x_0\Leftrightarrow \ln\frac{1}{x_0}=x_0$

Β6. Για $x>0$, είναι $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα.
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[x,x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$. Άρα, από το θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}+1=\ln(x+1)+x+1-\ln x-x\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\ln\frac{x+1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1=\xi\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\xi}=1.$$

Η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα, άρα το ξ αυτό είναι μοναδικό.

05Β

Β1.i. Για κάθε $x\in\mathrm{A}$, η σχέση $e^{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu x=\left(e^{f(x)}-e\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\pi$ γράφεται ισοδύναμα

$$e^{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu x=\left(e^{f(x)}-e\right)\cdot(-1)\Leftrightarrow e^{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu x=-e^{f(x)}+e\Leftrightarrow e^{f(x)}\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)=e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}=\frac{e}{1+\sigma\upsilon\nu x}>0\Leftrightarrow f(x)=\ln\frac{e}{1+\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow f(x)=1-\ln(1+\sigma\upsilon\nu x),\ x\in(-\pi,\pi)$$

ii. Για κάθε $x\in\mathrm{A}$, $-1<\sigma\upsilon\nu x\le 1\Leftrightarrow 0<1+\sigma\upsilon\nu x\le 2\overset{\ln\uparrow}{\Rightarrow}\ln(1+\sigma\upsilon\nu x)\le\ln 2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow-\ln(1+\sigma\upsilon\nu x)\ge-\ln 2\Leftrightarrow f(x)=1-\ln(1+\sigma\upsilon\nu x)\ge 1-\ln 2>0$$

β΄τρόπος. Για κάθε $x\in\mathrm{A}$, είναι $f'(x)=\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$.

Η εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow\eta\mu x=0\overset{x\in\mathrm{A}}{\Leftrightarrow}x=0$ Ο πίνακας των προσήμων της $f'(x)$ και των μεταβολών της συνάρτησης f είναι:

x	$-\pi$	0	π
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	ο ε	$\nearrow$

Έτσι, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\pi,0]$, γνησίως αύξουσα στο $[\pi,0)$ και παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$, το $f(0)=1-\ln 2>0$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathrm{A}$, ισχύει $f(x)\ge f(0)=1-\ln 2>0$.

Β2. Έστω τυχαίο $\alpha\in\mathrm{A}=(-\pi,\pi)$. Τότε και το $-\alpha\in\mathrm{A}$ και ισχύουν οι σχέσεις

$f(-\alpha)=1-\ln(1+\text{συν}(-\alpha))=1-\ln(1+\text{συνα})=f(\alpha)$ και

$f'(-\alpha)=\dfrac{\text{ημ}(-\alpha)}{1+\text{συν}(-\alpha)}=-\dfrac{\text{ημ}\alpha}{1+\text{συν}\alpha}=-f'(\alpha)$.

Η εφαπτομένη (ε_1) της C_f στο $(\alpha, f(\alpha))$ έχει εξίσωση

$(\varepsilon_1): y-f(\alpha)=f'(\alpha)\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow (\varepsilon_1): y=f'(\alpha)\cdot x+f(\alpha)-\alpha\cdot f'(\alpha)$

και η εφαπτομένη (ε_2) της C_f στο $(-\alpha, f(-\alpha))$ έχει εξίσωση

$(\varepsilon_2): y-f(-\alpha)=f'(-\alpha)\cdot(x+\alpha) \Leftrightarrow (\varepsilon_2): y=-f'(\alpha)\cdot x+f(\alpha)-\alpha\cdot f'(\alpha)$

Άρα οι $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ τέμνονται στο σημείο $(0, f(\alpha)-\alpha\cdot f'(\alpha))$ του άξονα $y'y$.

Β3. Στο $(-\pi,\pi)$ η δοσμένη ανίσωση μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως:

$$\sqrt{3}\cdot\text{ημ}x>1+\text{συν}x \Leftrightarrow \frac{\text{ημ}x}{1+\text{συν}x}>\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow f'(x)>f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (1)$$

Για κάθε $x\in A$, είναι $f''(x)=\dfrac{\text{συν}x\cdot(1+\text{συν}x)+\text{ημ}^2x}{(1+\text{συν}x)^2}=\dfrac{\text{συν}x+1}{(1+\text{συν}x)^2}=\dfrac{1}{1+\text{συν}x}>0$,

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα.

Τότε η ανίσωση $(1)\Leftrightarrow\ x>\dfrac{\pi}{3}$ και $x\in(-\pi,\pi)$, άρα τελικά $x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right)$

Β4.i. Είναι $\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{f(x)\cdot f'(x)}{\text{ημ}x}=\lim\limits_{x\to-\pi^+}\dfrac{1-\ln(1+\text{συν}x)}{1+\text{συν}x}\overset{u=1+\text{συν}x}{=}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{1-\ln u}{u}=$

$$=\lim_{u\to0^+}\left(\frac{1}{u}\cdot(1-\ln u)\right)=(+\infty)\cdot[-(-\infty)]=+\infty \text{ και}$$

ii. Το $\lim\limits_{x\to\pi}(f(x)\cdot\sigma\varphi x)=\lim\limits_{x\to\pi}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\pi^-}\left(\dfrac{1}{\text{ημ}x}\cdot\text{συν}x\right)=(+\infty)\cdot(+\infty)\cdot(-1)=-\infty$,

εφόσον $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}[1-\ln(1+\text{συν}x)]\overset{u=1+\text{συν}x}{=}\lim\limits_{u\to0^+}(1-\ln u)=-(-\infty)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to\pi^-}\text{ημ}x=0$ με $\text{ημ}x>0$, για $x<\pi$, κοντά στο π , άρα $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{1}{\text{ημ}x}=+\infty$

06B

B1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα είναι συνεχής και στο 1. Επομένως ισχύει $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)=\gamma$. Είναι $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+3}-2}=$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x\cdot(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4}=\lim\limits_{x\to1^-}\left[x\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)\right]=1\cdot(2+2)=4$, άρα $\gamma=4$ και $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)=4$.

Για $x>1$, είναι $x^2+\alpha x+\beta=f(x)\cdot\left(x^2+x-2\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2+\alpha x+\beta\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\left[f(x)\cdot\left(x^2+x-2\right)\right]\Leftrightarrow 1+\alpha+\beta=4\cdot0\Leftrightarrow\beta=-\alpha-1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2+\alpha x-\alpha-1}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x-1)\cdot(x+1)+\alpha\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x-1)\cdot(x+1+\alpha)}{(x-1)\cdot(x+2)}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+1+\alpha}{x+2}=\frac{2+\alpha}{3}$.

Άρα $\frac{2+\alpha}{3}=4\Leftrightarrow 2+\alpha=12\Leftrightarrow\ \alpha=10$ και τότε $\beta=-11$.

Επομένως ο τύπος της συνάρτησης απλοποιείται ως εξής:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4}=x\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right), & x\in[0,1)\\ 4, & x=1\\ \dfrac{x^2+10x-11}{x^2+x-2}=\dfrac{(x-1)\cdot(x+11)}{(x-1)\cdot(x+2)}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\qquad f(x)=\begin{cases}x\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right), & x\in\mathrm{A}_1=[0,1]\\ \dfrac{x+11}{x+2}=1+\dfrac{9}{x+2}, & x\in\mathrm{A}_2=(1,+\infty)\end{cases}$$

B2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)=\sqrt{x+3}+2+\frac{x}{2\sqrt{x+3}}>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\mathrm{A}_1=[0,1]$.

Και για κάθε $x \in (1,+\infty)$, είναι $f'(x) = -\dfrac{9}{(x+2)^2} < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\mathrm{A}_2 = (1,+\infty)$.

Επομένως η συνάρτηση f παρουσιάζει τ. ελάχιστο στο $x=0$, το $f(0)=0$ και μέγιστο στο $x=1$, το $f(1)=4$

Είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο A_1 , άρα $f(\mathrm{A}_1) = \left[f(0), f(1) \right] = [0,4]$ και γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο A_2 , άρα το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι $f(\mathrm{A}_2) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to1^+} f(x) \right) = (1,4)$, εφόσον ισχύει οτι

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{9}{x+2} \right) = 1+0 = 1$.

Άρα το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $f\left([0,+\infty)\right) = f(\mathrm{A}_1) \cup f(\mathrm{A}_2) = [0,4]$

B3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει οτι $e^{x-1} \geq (x-1)+1 > x-1 \Rightarrow e^{x-1}+1-x > 0$, οπότε η εξίσωση $f\left(e^{x-1}+1-x\right) = x^2-2x+5 \Leftrightarrow f\left(e^{x-1}+1-x\right) = (x-1)^2+4$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $(x-1)^2+4 \geq 4$, με την ισότητα μόνο για $x=1$. Αντίθετα, η συνάρτηση $f\left(e^{x-1}+1-x\right) \leq 4 = f(1)$, λόγω του Β2., και η ισότητα ισχύει μόνο για $e^{x-1}+1-x = 1 \Leftrightarrow e^{x-1} = (x-1)+1 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει μοναδική λύση το $x=1$

B4. Για κάθε $x \in (1,+\infty)$, είναι $f''(x) = \dfrac{18}{(x+2)^3} > 0$, οπότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$. Για $x>1$, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$. Τότε, από το θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,x)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{f(x)-4}{x-1}$.

Είναι $1 < \xi < x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-4}{x-1} < f'(x) \Leftrightarrow f(x) < (x-1)\cdot f'(x)+4$

B5. Έστω $\mathrm{M}\left(x_0, f(x_0)\right)$ σημείο της C_f , με τετμημένη $x_0 > 1$. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο M έχει εξίσωση $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ και διέρχεται από το σημείο $\left(0,\frac{7}{2}\right)$, αν και μόνο αν ισχύει $\frac{7}{2}-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\cdot\left(-x_0\right)\Leftrightarrow$

$$\frac{7}{2}-1-\frac{9}{x_0+2}=\frac{9x_0}{\left(x_0+2\right)^2}\Leftrightarrow 5\left(x_0+2\right)^2-18\left(x_0+2\right)=18x_0\Leftrightarrow 5x_0^2-16x_0-16=0.$$

Η εξίσωση $5x^2-16x-16=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=16^2+20\cdot16=16\cdot36$ και ρίζες $x=\frac{16\pm4\cdot6}{10}=\begin{cases}4\\-\frac{4}{5}\end{cases}$ Εφόσον το $x_0>1$, ισούται με $x_0=4$. Είναι $f\left(4\right)=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ και $f'\left(4\right)=-\frac{9}{36}=-\frac{1}{4}$, άρα η $\left(\varepsilon\right):y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{4}\cdot\left(x-4\right)\Leftrightarrow\left(\varepsilon\right):y=-\frac{1}{4}\cdot x+\frac{7}{2}$

Β6. Το εμβαδόν του τριγώνου OMK δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot f\left(x\right)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\left(1+\frac{9}{x+2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{9x}{x+2}\right)$. Όταν η τετμημένη του σημείου $\mathrm{M}\left(x,f\left(x\right)\right)$, με $x>1$, μεταβάλλεται με το χρόνο, με ρυθμό $x'\left(t\right)=2\ \mu/s$ τότε και το εμβαδόν E του τριγώνου OMK μεταβάλλεται με το χρόνο, άρα

$$\mathrm{E}\left(t\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(x\left(t\right)+\frac{9x\left(t\right)}{x\left(t\right)+2}\right)\Rightarrow\mathrm{E}'\left(t\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(x'\left(t\right)+9\frac{x'\left(t\right)\cdot\left(x\left(t\right)+2\right)-x\left(t\right)\cdot x'\left(t\right)}{\left(x\left(t\right)+2\right)^2}\right).$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που το M διέρχεται από το σημείο $\left(4,f\left(4\right)\right)$ ο ρυθμός μεταβολής του, είναι $\mathrm{E}'\left(t_0\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{18}{\left(x\left(t_0\right)+2\right)^2}\right)\cdot x'\left(t_0\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{18}{36}\right)\cdot2=\frac{3}{2}$ τ.μ./s

Β7. Το σύνολο $\left\{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]/\,\eta\mu x>1\right\}=\varnothing$.

Αντίθετα το σύνολο $\left\{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]/\,\eta\mu x\in\left[0,1\right]\right\}=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, άρα ορίζεται στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ η συνάρτηση $f\circ g$ με $\left(f\circ g\right)\left(x\right)=f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(\eta\mu x\right)=\eta\mu x\cdot\left(\sqrt{\eta\mu x+3}+2\right)$

- Η δοσμένη ανίσωση $\left(f\circ g\right)^2\left(x\right)<f^2\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left|\left(f\circ g\right)\left(x\right)\right|<\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\overset{\left(f\circ g\right)\left(x\right)>0}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow f\left(g\left(x\right)\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}g\left(x\right)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x<\eta\mu\frac{\pi}{6}\overset{\eta\mu x\uparrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow}0\le x<\frac{\pi}{6}$$

07B

B1. Σύμφωνα με το σχήμα ο πίνακας προσήμων της $f'(x)$ και μεταβολών της συνάρτησης f είναι:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	τ.μ	↘	τ.ε	↗	

Έτσι, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0]=\mathrm{A}_1$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,2]=\mathrm{A}_2$ και γνησίως αύξουσα το διάστημα $\mathrm{A}_3=[2,+\infty)$. Παρουσιάζει τ.μέγιστο στο $x=0$ και τ.ελάχιστο στο $x=2$.

B2. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\mathrm{A}_2=[0,2]$, άρα $0<2 \Leftrightarrow f(0)>f(2)$. Ισχύει και $f(0)\cdot f(2)<0$, δηλαδή τα $f(0), f(2)$ είναι αριθμοί ετερόσημοι. Επομένως είναι το $f(0)>0$ και το $f(2)<0$.

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο A_1 , άρα το σύνολο τιμών της στο A_1 είναι το $f(\mathrm{A}_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right]=(-\infty, f(0)]$. Το $0\in f(\mathrm{A}_1)$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο A_1, άρα υπάρχει ένα ακριβώς $x_1\in(-\infty,0)$, τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\mathrm{A}_2=[0,2]$ και ισχύει $f(0)\cdot f(2)<0$. Άρα, από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_2\in(0,2)$, τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2 , άρα το x_2 είναι μοναδικό στο A_2 .
- Ομοίως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο A_3 , άρα το σύνολο τιμών της στο A_3 είναι το $f(\mathrm{A}_3)=\left[f(2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=[f(2),+\infty)$, με $f(2)<0$. Το $0\in f(\mathrm{A}_3)$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο A_3, άρα υπάρχει ένα ακριβώς $x_3\in(2,+\infty)$, τέτοιο ώστε $f(x_3)=0$. Επομένως, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

B3. Για τα x_1, x_2 του προηγούμενου ερωτήματος, ισχύει οτι: η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) και

$f(x_1)=f(x_2)=0$. Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση f στο $[x_1,x_2]\subseteq(-\infty,2]$.

Β4. Η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι η ευθεία $(\delta): y=x$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\delta=1$

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$. Άρα, από το θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi)=\dfrac{f'(2)-f'(1)}{2-1}=\dfrac{0-(-1)}{1}=1$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της C' το σημείο της $(\xi, f'(\xi))$ ισούται με $\lambda_\varepsilon=f''(\xi)=1=\lambda_\delta$, άρα $(\varepsilon)\parallel(\delta)$

Β5.i. Είναι $\lim\limits_{x\to1}(f'(x)+1)=-1+1=0$ και $f'(x)+1>0$ για $x\neq1$, κοντά στο 1 .

- Για $x>1\Leftrightarrow x-1>0$, κοντά στο 1 , είναι $\eta\mu(x-1)>0$ και $\lim\limits_{x\to1^+}\eta\mu(x-1)=0$.

Άρα είναι $(f'(x)+1)\cdot\eta\mu(x-1)>0$ και $\lim\limits_{x\to1^+}\left[(f'(x)+1)\cdot\eta\mu(x-1)\right]=0$, οπότε

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(f'(x)+1)\cdot\eta\mu(x-1)}=+\infty$$

- Για $x<1\Leftrightarrow x-1<0$, κοντά στο 1 , είναι $\eta\mu(x-1)<0$ και $\lim\limits_{x\to1^+}\eta\mu(x-1)=0$.

Άρα είναι $(f'(x)+1)\cdot\eta\mu(x-1)<0$ και $\lim\limits_{x\to1^+}\left[(f'(x)+1)\cdot\eta\mu(x-1)\right]=0$, οπότε

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(f'(x)+1)\cdot\eta\mu(x-1)}=-\infty .$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(f'(x)+1)\cdot\eta\mu(x-1)}$

ii. Η συνάρτηση f' παρουσιάζει ελάχιστο, στο σημείο $x_0=1$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, ισχύει οτι $f''(1)=0$

Τότε, το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)-(-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=f''(1)=0$

05Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1, άρα ισχύει $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$.

Για $x\neq 1$, κοντά στο 1, ισχύει οτι $\alpha x+\beta\sqrt{x}+1=(x-1)\cdot f(x)$, επομένως $\lim\limits_{x\to 1}\left(\alpha x+\beta\sqrt{x}+1\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot f(x)\right]\Leftrightarrow \alpha+\beta+1=0\Leftrightarrow \alpha=-\beta-1$.

Τότε η παράσταση $\dfrac{\alpha x+\beta\sqrt{x}+1}{x-1}=\dfrac{(-\beta-1)\cdot x+\beta\sqrt{x}+1}{x-1}=\dfrac{-\beta x-x+\beta\sqrt{x}+1}{x-1}=$

$$=\frac{-\beta\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)-(x-1)}{x-1}=\frac{-\beta\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}-1=\frac{-\beta\sqrt{x}\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}-1=$$

$=\dfrac{-\beta\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-1$, άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha x+\beta\sqrt{x}+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{-\beta\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-1\right)=-\dfrac{\beta}{2}-1$.

Επομένως είναι $-\dfrac{\beta}{2}-1=0\Leftrightarrow\dfrac{\beta}{2}=-1\Leftrightarrow\beta=-2$, οπότε $\alpha=-\beta-1=2-1\Leftrightarrow\alpha=1$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1, με $f(1)=0$. Για $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$, είναι

$$f(x)=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1-2}{\sqrt{x}+1}=1-\frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

, οπότε τελικά είναι $f(x)=1-\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$, $x\geq 0$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Για κάθε $x>0$, είναι $f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)^2}>0$, επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, στο $[0,+\infty)$.

Οπότε, για κάθε $x\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow f(x)\geq -1$, δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$, το $f(0)=-1$.

Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $f\left([0,+\infty)\right)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-1,1)$, εφόσον το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+1\right)=+\infty\Rightarrow\ \Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1-0=1$

Γ3. Είναι $f(1)=0$ και $f'(1)=\frac{1}{4}$. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $(1,0)$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Leftrightarrow(\varepsilon): y=\frac{1}{4}\cdot(x-1)$

Για $x\geq 0$, έστω $f(x)=\frac{1}{4}(x-1)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{x-1}{4}\Leftrightarrow\frac{x-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{x-1}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-1)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)^2=4\cdot(x-1)\Leftrightarrow(x-1)\cdot\left[\left(\sqrt{x}+1\right)^2-4\right]=0\Leftrightarrow x=1,$ ή

$\left(\sqrt{x}+1\right)^2=4\overset{\sqrt{x}+1>0}{\Leftrightarrow}\sqrt{x}+1=2\Leftrightarrow\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1.$

Άρα μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία (ε) είναι το σημείο $(1,0)$

Γ4.i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$. Συνεπώς ορίζεται η αντίστροφή της, στο $D_{f^{-1}}=f\left([0,+\infty)\right)=[-1,1)$.

Έστω $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$ και τότε

$1-\frac{2}{\sqrt{x}+1}=y\Leftrightarrow 1-y=\frac{2}{\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow\sqrt{x}+1=\frac{2}{1-y}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{2}{1-y}-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1+y}{1-y}\Leftrightarrow x=\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2=f^{-1}(y),\ y\in[-1,1),$ άρα

$f^{-1}(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2,\ x\in[-1,1).$

ii. Αν υπάρχουν κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $(\varepsilon): y=\frac{1}{4}(x-1)$, οι τετμημένες τους θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}\cdot(x-1)$.

Η συνάρτηση f^{-1} ορίζεται για $x\in[-1,1)$ και το σύνολο τιμών της είναι το πεδίο ορισμού της f, άρα στο $[0,+\infty)$, δηλαδή, $f^{-1}(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{1}{4}(x-1)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$

Επομένως το σύνολο $\left\{-1\leq x<1 \text{ και } \frac{1}{4}(x-1)\geq 0\right\}=\left\{-1\leq x<1 \text{ και } x\geq 1\right\}=\varnothing$.

Άρα δεν ορίζεται η εξίσωση $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}\cdot(x-1)$

Επομένως, η $C_{f^{-1}}$ δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $(\varepsilon): y=\frac{1}{4}(x-1)$

Γ5. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)+x\cdot\ln x-1,\ x\geq 1$.
Η συνάρτηση φ είναι συνεχής, σαν αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
Για κάθε $x>1$, είναι $\varphi'(x)=f'(x)+\ln x+1>0$, ως άθροισμα θετικών. Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα.
Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$ και ισχύουν $\varphi(1)=f(1)-1=-1<0$ και $\varphi(e)=f(e)+e-1=1-\frac{2}{\sqrt{e}+1}+e-1=\frac{e\sqrt{e}+e-2}{\sqrt{e}+1}>0$, άρα $\varphi(1)\cdot\varphi(e)<0$. Άρα, από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,e)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0$. Η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα, άρα το x_0 είναι μοναδικό. Επομένως, υπάρχει ακριβώς ένα $x_0>1$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)+x_0\cdot\ln x_0=1$

Γ6.i. Για κάθε $x>0$, παραγωγίζοντας τη συνάρτηση f' προκύπτει οτι $f''(x)=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)^2+\sqrt{x}\cdot 2\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)^4}=-\frac{3\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\cdot x\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)^3}<0$. Άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα.
Για το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος, η δοσμένη σχέση $4f'\left(f(x)+x\cdot\ln x\right)<1$ ορίζεται για $x>0$ και $f(x)+x\cdot\ln x>0$ (1) και τότε γράφεται ισοδύναμα:
$4f'\left(f(x)+x\cdot\ln x\right)<1\Leftrightarrow f'\left(f(x)+x\cdot\ln x\right)<\frac{1}{4}\Leftrightarrow f'\left(f(x)+x\cdot\ln x\right)<f'(1)\Leftrightarrow$
$\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)+x\cdot\ln x>1$, άρα πληρείται η (1) και τότε η τελευταία σχέση γίνεται $\Leftrightarrow\varphi(x)>0\Leftrightarrow\varphi(x)>\varphi(x_0)\overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow}x>x_0$

ii. Για $x > x_0 > 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) > f(1) = 0$, οπότε $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) > 0$.
Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, όταν $x > x_0$, κοντά στο x_0 , τότε $f(x) + x \cdot \ln x - 1 > 0$. Και είναι $\lim\limits_{x \to x_0^+} \left(f(x) + x \cdot \ln x - 1 \right) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \varphi(x) = \varphi(x_0) = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{1}{f(x) + x \cdot \ln x - 1} = +\infty$. Επομένως, το ζητούμενο όριο ισούται με

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{f(x) + x \cdot \ln x - 1} = \lim_{x \to x_0^+} \left(f(x) \cdot \frac{1}{f(x) + x \cdot \ln x - 1} \right) = f(x_0) \cdot (+\infty) = +\infty$$

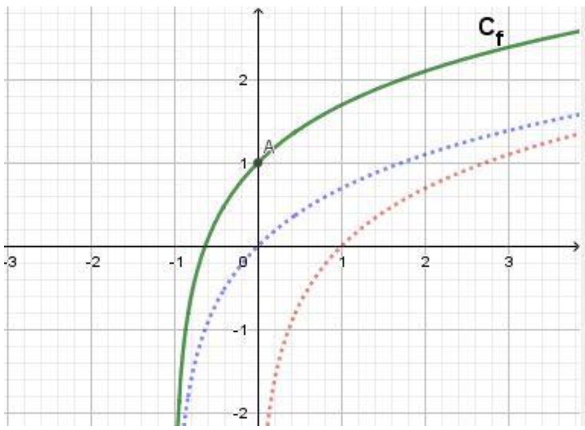
06Γ

Γ1. Είναι $g(x) = \dfrac{e^{x-1}}{e^{x-1} + 2}$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow g\left(f(x)\right) = \dfrac{e^{f(x)-1}}{e^{f(x)-1} + 2}$, $x > -1$ και ισχύει οτι $(g \circ f)(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$, $x \in (-1, +\infty)$. Άρα για κάθε $x > -1$, είναι

$$\frac{e^{f(x)-1}}{e^{f(x)-1} + 2} = \frac{x+1}{x+3} \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{e^{f(x)-1} + 2} = 1 - \frac{2}{x+3} \Leftrightarrow e^{f(x)-1} + 2 = x + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)-1} = x + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) - 1 = \ln(x+1) \Leftrightarrow f(x) = 1 + \ln(x+1),\ x > -1$$

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει με μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = \ln x$, $x > 0$ κατά μια μονάδα οριζόντια προς τα αριστερά και στη συνέχεια, μια μονάδα κατακόρυφα προς τα πάνω



Γ2.i. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x-1}}{e^{x-1}+2}\overset{u=e^{x-1}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{u+2}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{u}=\lim\limits_{u\to+\infty}1=1$ και το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\ln(x+1)\right)=1+(+\infty)=+\infty$,

άρα το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)}\cdot g(x)\right)=0\cdot 1=0$.

Επίσης, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f^2(x)-2f(x)-3\right)\overset{u=f(x)}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(u^2-2u-3\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}u^2=+\infty$.

Επομένως η παράσταση $f^2(x)-2f(x)-3>0$, κοντά το $+\infty$.

Οπότε, το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|f^2(x)-2f(x)-3\right|+g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^2(x)-2f(x)-3+g(x)}{f(x)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2-\dfrac{3}{f(x)}+\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)=(+\infty)-2-0+0=+\infty$

ii. Το $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{(g\circ f)(x)}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x+3}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{1}{x+1}\cdot(x+3)\right)=(+\infty)\cdot 2=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=1+(-\infty)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

Για κάθε $x>-1$ ισχύει $\left|\dfrac{1}{f(x)}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{(g\circ f)(x)}\right|=\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\cdot\left|\eta\mu\dfrac{1}{(g\circ f)(x)}\right|\le\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\le\dfrac{1}{f(x)}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{(g\circ f)(x)}\le\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|$. Είναι $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\pm\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\right)=0$, άρα

σύμφωνα το κριτήριο παρεμβολής, είναι και $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{1}{f(x)}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{(g\circ f)(x)}\right)=0$

Γ3. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-x,\ x>-1$.

Για κάθε $x>-1$, η παράγωγος της φ είναι $\varphi'(x)=f'(x)-1=\dfrac{1}{x+1}-1=-\dfrac{x}{x+1}$.

x	-1	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	0	−
φ	$\nearrow$	ο.μ	$\searrow$

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων της $\varphi'(x)$ και των μεταβολών της φ , η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1=(-1,0]$, γνησίως φθίνουσα στο $A_2=[0,+\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο για $x=0$, το

$\varphi(0)=f(0)=1$. Το $\lim\limits_{x\to -1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)+1=-\infty$.

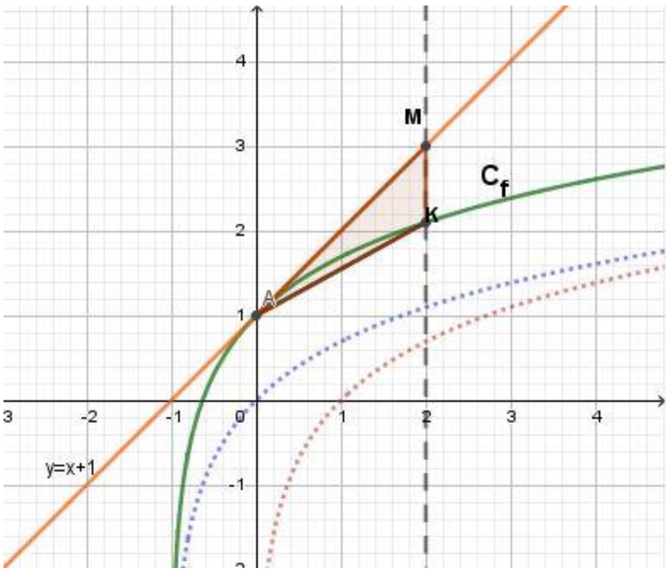
Η συνάρτηση φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A_1 , άρα το $\varphi(\mathrm{A}_1)=\left(\lim\limits_{x\to -1^+}\varphi(x),\varphi(0)\right]=(-\infty,1]$ οπότε $0\in\varphi(\mathrm{A}_1)$. Άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in(-1,0)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=x_1$.

Επίσης, είναι $\varphi(3)=\ln 4-2=2\ln 2-2=2(\ln 2-1)<0$, άρα $\varphi(0)\cdot\varphi(3)<0$ και η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,3]$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_2\in(0,3)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_2)=0\Leftrightarrow f(x_2)=x_2$. Η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$, άρα το x_2 είναι μοναδικό.

Άρα τελικά, η εξίσωση $f(x)=x$ έχει ακριβώς δυο ρίζες και κατά συνέπεια η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δυο κοινά σημεία με την ευθεία $y=x$

Γ4. Είναι $f(0)=1$ και $f'(0)=1$. Άρα η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο A έχει εξίσωση $(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow(\varepsilon): y=x+1$.

Επομένως το $\mathrm{M}(x,y)$ είναι $\mathrm{M}(x,x+1)$ και το $\mathrm{K}(x,f(x))$, με $x>0$. Για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln(x+1)<(x+1)-1\Leftrightarrow 1+\ln(x+1)<x+1\Leftrightarrow f(x)<x+1$, άρα η C_f είναι κάτω από την ευθεία (ε) στο διάστημα $(0,+\infty)$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, για $x>0$, το εμβαδόν του τριγώνου AMK δίνεται από τον τύπο



$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{MK}\cdot x=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(x+1-f(x)\right)\cdot x=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(x-\ln(x+1)\right)\cdot x=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-x\cdot\ln(x+1)\right)$$

Όταν η τετμημένη του σημείου M μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε και το εμβαδόν του τριγώνου AMK μεταβάλλεται με το χρόνο, οπότε η τελευταία σχέση γίνεται

$\mathrm{E}(t)=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2(t)-x(t)\cdot\ln\left(x(t)+1\right)\right)$. Έτσι, το ζητούμενο εμβαδόν μεταβάλλεται με ρυθμό $\mathrm{E}'(t)=\frac{1}{2}\cdot\left(2x(t)\cdot x'(t)-x'(t)\cdot\ln\left(x(t)+1\right)-x(t)\cdot\frac{x'(t)}{x(t)+1}\right)$. Άρα, τη χρονική στιγμή t_0 που το υλικό σημείο M διέρχεται από το $(2,3)$ είναι $x(t_0)=2\ \mu$ και $x'(t_0)=2\ \mu/s$ και τότε $\mathrm{E}'(t_0)=\frac{1}{2}\cdot\left(2x(t_0)-\ln\left(x(t_0)+1\right)-\frac{x(t_0)}{x(t_0)+1}\right)\cdot x'(t_0)$, άρα $\mathrm{E}'(t_0)=\frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot2-\ln3-\frac{2}{3}\right)\cdot2=\frac{10}{3}-\ln3\ \mu/s$

07Γ

Γ1. Από τη σχέση (1) για $x=1$ προκύπτει $f(1)-2\alpha=f(1)+\beta\Leftrightarrow\beta=-2\alpha$. Τότε η σχέση (1) γίνεται $(x-1)\cdot f(x)=\alpha\cdot\sqrt{x^2+3}-2\alpha,\ x\in\mathbb{R}$.

Για $x\neq1$, είναι $f(x)=\alpha\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\alpha\cdot\frac{x^2-1}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\alpha\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$,

άρα $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\alpha\cdot\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\alpha\cdot\frac{2}{4}=\frac{\alpha}{2}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο 1 . Έτσι, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha=1$, άρα και $\beta=-2$.

Γ2.i. Για $\alpha=1,\ \beta=-2$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x\neq1\\ \frac{1}{2}, & x=1\end{cases}$

Για κάθε $x\neq1$, είναι $f'(x)=\frac{\frac{x\cdot(x-1)}{\sqrt{x^2+3}}-\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-x-x^2-3+2\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2\cdot\sqrt{x^2+3}}=$

$=\frac{2\sqrt{x^2+3}-(x+3)}{(x-1)^2\cdot\sqrt{x^2+3}}$.

Έστω $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3}>x+3$.

- Η ανίσωση, για $x\le -3$ ισχύει.
- Για $x>-3$ γίνεται ισοδύναμα $4\left(x^2+3\right)>\left(x+3\right)^2 \Leftrightarrow 4x^2+12>x^2+6x+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-2x+1\right)>0 \Leftrightarrow 3\left(x-1\right)^2>0 \Leftrightarrow x\ne 1$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)\ge 0$, με $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$. Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2}{x-1}\overset{x>0}{=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\frac{2}{x}\right)}{x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1}=1$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2}{x-1}\overset{x<0}{=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\frac{2}{x}\right)}{x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=-\frac{1}{1}=-1$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, άρα το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-1,1)$

ii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι και $1-1$, επομένως ορίζεται η αντίστροφή της, στο σύνολο $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=(-1,1)$.

Για $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ η δοσμένη ανίσωση $f^{-1}(\eta\mu x)<1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(\eta\mu x)\right)<f(1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \eta\mu x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu x<\eta\mu\frac{\pi}{6} \overset{\eta\mu x\uparrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{6}$

Γ3. Κοντά στο $-\infty$ η $f(x)>-1\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}>-1 \overset{x-1<0}{\Leftrightarrow} \sqrt{x^2+3}-2<-x+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} < 2+(1-x) \overset{3-x>0}{\Leftrightarrow} x^2+3<(3-x)^2 \Leftrightarrow x^2+3<9-6x+x^2 \Leftrightarrow 6x<6 \Leftrightarrow x<1$

Άρα η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την ευθεία $y=-1$, κοντά στο $-\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+1)=-1+1=0$ και $f(x)+1>0$ κοντά στο $-\infty$.

Άρα το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)+1}=+\infty$. Επίσης, είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$.

Επομένως, το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x}{f(x)+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)+1}\cdot(x^3-x)\right)=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$

Γ4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$. Τότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,1)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1+1}=\dfrac{\frac{1}{2}-0}{2}=\dfrac{1}{4}$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) , της C_f στο σημείο της $(\xi, f(\xi))$, είναι $\lambda_{(\varepsilon)}=f'(\xi)=\dfrac{1}{4}=\lambda_{(\zeta)}$, άρα η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y=\dfrac{1}{4}\cdot x+3$

08Γ

Γ1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν ισχύει $x^2+(\lambda-1)\cdot x+\lambda+2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως, όταν και μόνο όταν $\Delta<0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2-4(\lambda+2)<0 \Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda-7<0 \Leftrightarrow -1<\lambda<7$

Γ2.i. Για $\lambda=3$, είναι $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$, $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι

$$f'(x)=-\frac{2x+2}{2(x^2+2x+5)\cdot\sqrt{x^2+2x+5}}=-\frac{x+1}{(x^2+2x+5)\cdot\sqrt{x^2+2x+5}} .$$

Είναι $f'(-1)=0$.

Ο πίνακας προσήμων της $f'(x)$ και μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	ο.μ.	$\searrow$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,+\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο, για $x=-1$, το $f(-1)=\frac{1}{2}$.

Από την μονοτονία και τη συνέχεια της f, προκύπτει οτι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $\mathrm{A}_1=(-\infty,-1]$ είναι το $f(\mathrm{A}_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(-1)\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right]$, γιατί είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^2+2x+5\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^2\right)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2+2x+5}=+\infty$, επομένως είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}=0$.

Ομοίως το σύνολο των τιμών της f στο διάστημα $\mathrm{A}_2=[-1,+\infty)$ είναι το $f(\mathrm{A}_1)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(-1)\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right]$, οπότε $f(\mathbb{R})=f(\mathrm{A}_1)\cup f(\mathrm{A}_2)=\left(0,\frac{1}{2}\right]$

ii. Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)-\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύουν:

$F(0)=\frac{1}{\sqrt{5}}>0$ και $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-1<0$, γιατί $f(x)\le\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)-1\le-\frac{1}{2}<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $F(0)\cdot F\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

Άρα, από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, τέτοιο ώστε $F(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\eta\mu x_0$, δηλαδή η εξίσωση $f(x)=\eta\mu x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $\mathbb{R}$

Γ3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η σχέση $e^{\frac{f(x)-1}{\ln f(x)}}>1\Leftrightarrow\frac{f(x)-1}{\ln f(x)}>\ln 1\Leftrightarrow\frac{f(x)-1}{\ln f(x)}>0\ (1')$.

Το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left(0,\frac{1}{2}\right]$, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει οτι

$0 < f(x) \leq \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow f(x) - 1 < 0$ και $\ln f(x) < 0$, άρα $\frac{f(x)-1}{\ln f(x)} > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{f(x)-1}{\ln f(x)}} > 1$.

Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει η σχέση $\ln f(x) < f(x) - 1$, εφόσον $f(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, άρα $f(x) \neq 1$ και $\ln f(x) < 0$. Άρα $1 > \frac{f(x)-1}{\ln f(x)} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{f(x)-1}{\ln f(x)}\right) < 0$

Γ4. Έστω η συνάρτηση $g(x) = 2\varepsilon\varphi x - 1,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

i. Το σύνολο $\left\{x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) / g(x) \in \mathbb{R}\right\} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \neq \varnothing$, άρα ορίζεται στο $D_{f \circ g} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η συνάρτηση $f \circ g$, με τύπο $f(g(x)) = f(2\varepsilon\varphi x - 1) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\varepsilon\varphi x - 1 + 1)^2 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon\varphi^2 x + 4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\varphi^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{2} = \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{2} \overset{x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{\underset{\sigma\upsilon\nu x > 0}{=}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{2}$$

ii. Έστω $\mathrm{M}(x_0, (f \circ g)(x_0))$ σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f \circ g$. Η εφαπτομένη (ε) της $\mathrm{C}_{f \circ g}$ στο σημείο της M έχει εξίσωση $(\varepsilon): y - (f \circ g)(x_0) = (f \circ g)'(x_0) \cdot (x - x_0)$ και διέρχεται από το σημείο $(0,1)$, αν και μόνο αν ισχύει : $1 - (f \circ g)(x_0) = -x_0 \cdot (f \circ g)'(x_0) \Leftrightarrow 1 - \frac{\sigma\upsilon\nu x_0}{2} = \frac{x_0 \cdot \eta\mu x_0}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - \sigma\upsilon\nu x_0 = x_0 \cdot \eta\mu x_0 \ (3)$.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = 2 - \sigma\upsilon\nu x - x \cdot \eta\mu x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = \mathrm{A}$.

Τότε η σχέση $(3) \Leftrightarrow \varphi(x_0) = 0$.

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο A .

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$\varphi'(x) = \eta\mu x - \eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x = -x \cdot \sigma\upsilon\nu x$.

Ο πίνακας των προσήμων της $\varphi'(x)$ και των μεταβολών της συνάρτησης φ είναι:

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	τ.ε	$\nearrow$	ο.μ	$\searrow$	τ.ε

Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $A_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, οπότε το σύνολο τιμών της στο A_1 είναι $\varphi(A_1) = \left[\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right), \varphi(0)\right] = \left[\frac{4-\pi}{2}, 1\right]$.

Είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_2 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε το σύνολο τιμών της στο A_2 είναι το $\varphi(A_2) = \left[\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right), \varphi(0)\right] = \left[\frac{4-\pi}{2}, 1\right]$.

Είναι $\varphi(A) = \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2) = \left[\frac{4-\pi}{2}, 1\right]$, άρα η $\varphi(x) > 0$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Επομένως η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ είναι αδύνατη, συνεπώς δεν υπάρχει εφαπτομένη της $C_{f \circ g}$ που να διέρχεται από το σημείο $(0,1)$.

04Δ

Δ1. Η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = x$, στο σημείο με τετμημένη $\frac{\pi}{2}$, άρα είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Για κάθε $x \in (0, \pi)$, η δοσμένη σχέση

$$(1) \Leftrightarrow f'(x) = -\sigma\varphi^2 x = -\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x - 1}{\eta\mu^2 x} = 1 - \frac{1}{\eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f'(x) = (x + \sigma\varphi x)' \Leftrightarrow$$

υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (0, \pi)$, $f(x) = x + \sigma\varphi x + c$. Για $x = \frac{\pi}{2}$ προκύπτει $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + c \Leftrightarrow c = 0$. Άρα τελικά είναι $f(x) = \sigma\varphi x + x,\ x \in (0, \pi)$

Για κάθε $x \in (0, \pi)$, είναι $f'(x) = -\sigma\varphi^2 x < 0$, άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Επομένως, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα

$$f((0, \pi)) = \left(\lim_{x \to \pi^-} f(x), \lim_{x \to 0^+} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Δ2. Είναι

$$\frac{f^2\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f^2\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{\eta\mu 2h}=\frac{\left(f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)\right)\cdot\left(f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)+f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)\right)}{h\cdot\frac{\eta\mu 2h}{h}}=$$

$$=\left(\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}-\frac{f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}\right)\cdot\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)+f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{\frac{\eta\mu 2h}{2h}\cdot 2}$$

Το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ και

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}\overset{u=-h}{=}-\lim\limits_{u\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+u\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}=-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Επίσης, είναι $\lim\limits_{h\to 0}\left(f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)+f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)\right)=2\cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ και $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu 2h}{2h}\overset{t=2h}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\eta\mu t}{t}=1$. Άρα το

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f^2\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{\eta\mu 2h}=2f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{2\cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}=2\cdot(-1)\cdot\left(1+\frac{\pi}{4}\right)=-2\cdot\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$$

Δ3. Για κάθε $x\in(0,\pi)$, είναι $f'(x)=-\sigma\varphi^2 x\Rightarrow f''(x)=2\sigma\varphi x\cdot\frac{1}{\eta\mu^2 x}=\frac{2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^3 x}$

Έτσι, η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. Άρα, από το θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $x_0\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, τέτοιο ώστε

$$f''(x_0)=\frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow\frac{2\sigma\upsilon\nu x_0}{\eta\mu^3 x_0}=\frac{0-(-1)}{\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow\frac{\sigma\upsilon\nu x_0}{\eta\mu^3 x_0}=\frac{2}{\pi}\Leftrightarrow 2\eta\mu^3 x_0=\pi\cdot\sigma\upsilon\nu x_0$$

Άρα η εξίσωση $2\eta\mu^3 x=\pi\cdot\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

Δ4.i. Είναι $g(x)=f^2(x)-4f(x)+2$, οπότε το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f^2(x)-4f(x)+2-f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+4f\left(\frac{\pi}{2}\right)-2}{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\left(f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)-4\right)}{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)-4\right)=$$

$$=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)-4=\pi-4$$

ii. Το $\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(f^2(x)-4f(x)+2\right)\overset{u=f(x)}{=}\lim_{u\to+\infty}\left(u^2-4u+2\right)=\lim_{u\to+\infty}u^2=+\infty$

άρα $\lim_{x\to0}\frac{1}{g(x)}=0$. Επίσης, είναι και $\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\left(-\sigma\varphi^2x\right)=-\infty$

Ισχύει οτι $\left|\frac{\eta\mu f'(x)}{g(x)}\right|\le\left|\frac{1}{g(x)}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{g(x)}\right|\le\frac{\eta\mu f'(x)}{g(x)}\le\left|\frac{1}{g(x)}\right|$ και $\lim_{x\to0}\left(\pm\left|\frac{1}{g(x)}\right|\right)=0$.

Επομένως, σύμφωνα με το Κριτήριο Παρεμβολής, είναι και $\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu f'(x)}{g(x)}=0$

05Δ

Δ1. **α΄ τρόπος.** Είναι $f(\mathbb{R})=[1,+\infty)$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\mathbb{R}$, για το οποίο είναι $f(x_0)=1$ και ισχύει $f(x)\ge f(x_0)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=x_0$ και είναι παραγωγίσιμη σ΄αυτό. Τότε, από το θεώρημα του Fermat, είναι $f'(x_0)=0$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει $f'(x_0)=\frac{x_0}{f(x_0)}\Leftrightarrow 0=\frac{x_0}{1}\Leftrightarrow x_0=0$. Άρα $f(0)=1$

β΄τρόπος Είναι $f(\mathbb{R})=[1,+\infty)$, άρα $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, από τη σχέση (1) προκύπτει ο πίνακας προσήμων της $f'(x)$ και μεταβολών της συνάρτησης f . Είναι λοιπόν $f'(0)=0$, $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	ο.ε	$\nearrow$

Επομένως η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$, το $f(0)$ και είναι $f(x)>f(0)$, για κάθε $x\neq 0$.

Είναι $f(\mathbb{R})=[1,+\infty)$, δηλαδή το ελάχιστο της f είναι το 1 , άρα $f(0)=1$

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η σχέση $(1)\Leftrightarrow 2f(x)\cdot f'(x)=2x\Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow$ υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η $f^2(x)=x^2+c$.

Για $x=0$, προκύπτει οτι $c=1$.

Άρα $f^2(x)=x^2+1\Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{x^2+1}\overset{f(x)\geq 1}{\Leftrightarrow} f(x)=\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$

Δ2. Είναι $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x},\ x>0$.

Όταν το x μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε και η γωνία ω μεταβάλλεται με το χρόνο, άρα

$$\varepsilon\varphi\omega(t)=\frac{\sqrt{x^2(t)+1}}{x(t)}\Rightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\cdot\omega'(t)=\frac{\dfrac{x(t)\cdot x'(t)\cdot x(t)}{\sqrt{x^2(t)+1}}-\sqrt{x^2(t)+1}\cdot x'(t)}{x^2(t)}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\left(1+\varepsilon\varphi^2\omega(t)\right)\cdot\omega'(t)=\dfrac{-x'(t)}{x^2(t)\cdot\sqrt{x^2(t)+1}}$. Άρα τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο M διέρχεται από το $(1,f(1))$ ισχύουν : $x(t_0)=1\ \mu$, $x'(t_0)=\sqrt{2}\ \mu/s$ και $\left(1+\varepsilon\varphi^2\omega(t_0)\right)\cdot\omega'(t_0)=\dfrac{-x'(t_0)}{x^2(t_0)\cdot\sqrt{x^2(t_0)+1}}$ με $\varepsilon\varphi\omega(t_0)=\dfrac{f(1)}{1}=\sqrt{2}$, άρα από την τελευταία σχέση προκύπτει οτι $(1+2)\cdot\omega'(t_0)=\dfrac{-\sqrt{2}}{1\cdot\sqrt{2}}\Leftrightarrow\omega'(t_0)=-\dfrac{1}{3}\ \mathrm{rad/s}$

Δ3. Το $f(0)=1$, άρα το $\left(0,\frac{1}{2}\right)\notin C_f$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ έχει εξίσωση: $(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ και διέρχεται από το σημείο $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ όταν και μόνο όταν ισχύει $\frac{1}{2}-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(-x_0)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}-\sqrt{x_0^2+1}=-\frac{x_0^2}{\sqrt{x_0^2+1}}\Leftrightarrow \sqrt{x_0^2+1}-2\left(x_0^2+1\right)=-2x_0^2\Leftrightarrow \sqrt{x_0^2+1}=2\Leftrightarrow x_0^2=3\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_0=-\sqrt{3}$, ή $x_0=\sqrt{3}$.

Άρα από το σημείο $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ διέρχονται δυο εφαπτόμενες της C_f , η (ε_1) με σημείο επαφής το $\left(-\sqrt{3}, f\left(-\sqrt{3}\right)\right)$ και η (ε_2) με σημείο επαφής το $\left(\sqrt{3}, f\left(\sqrt{3}\right)\right)$

Είναι $f\left(\pm\sqrt{3}\right)=\sqrt{3+1}=2$, $f'\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $f'\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επομένως, οι εφαπτόμενες $(\varepsilon_1): y-2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow(\varepsilon_1): y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x+\frac{1}{2}$ και

$(\varepsilon_2): y-2=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow(\varepsilon_2): y=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x+\frac{1}{2}$

Δ4.i. Το σύνολο $\left\{x\in(0,\pi)\,/\,g(x)\in\mathbb{R}\right\}=(0,\pi)\neq\varnothing$, άρα ορίζεται στο $D_{f\circ g}=(0,\pi)$ η συνάρτηση $f\circ g$ με τύπο

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f(\sigma\varphi x)=\sqrt{\sigma\varphi^2 x+1}=\sqrt{\frac{\text{συν}^2 x}{\text{ημ}^2 x}+1}=\sqrt{\frac{1}{\text{ημ}^2 x}}=\frac{1}{|\text{ημ}x|}=\frac{1}{\text{ημ}x},$$

εφόσον είναι $\text{ημ}x>0$, για κάθε $x\in(0,\pi)$.

Για κάθε $x\in(0,\pi)$, είναι $(f\circ g)'(x)=-\frac{\text{συν}x}{\text{ημ}^2 x}$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$(f\circ g)'(x)$	$-$	0	$+$
$f\circ g$	$\searrow$	ο.ε	$\nearrow$

Σύμφωνα με τον διπλανό πίνακα η συνάρτηση $f\circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ και παρουσιάζει ελάχιστο, για $x=\frac{\pi}{2}$, το $(f\circ g)\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Άρα ισχύει οτι $(f\circ g)(x)\geq 1$, με $(f\circ g)(x)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

Εναλλακτικά, για κάθε $x\in(0,\pi)$, είναι $0<\text{ημ}x\leq 1$, με την ισότητα μόνο για $x=\frac{\pi}{2}$ άρα $\frac{1}{\text{ημ}x}\geq 1$, με $(f\circ g)(x)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

Επίσης, για κάθε $x\in(0,\pi)$, είναι $(2x-\pi)^2\geq 0\Leftrightarrow e^{(2x-\pi)^2}\geq 1$, με την ισότητα μόνο όταν $(2x-\pi)^2=0\Leftrightarrow 2x-\pi=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

Άρα η ανίσωση $(f\circ g)(x)+e^{(2x-\pi)^2}\leq 2\Leftrightarrow (f\circ g)(x)=1 \text{ και } e^{(2x-\pi)^2}=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$

ii. Για κάθε $x\in(0,\pi)$, είναι

$(f\circ g)''(x)=-\frac{-\text{ημ}^3x-2\text{ημ}x\cdot\text{συν}^2x}{\text{ημ}^4x}=\frac{\text{ημ}^2x+2\cdot\text{συν}^2x}{\text{ημ}^3x}=\frac{1+\text{συν}^2x}{\text{ημ}^3x}>0$, άρα η συνάρτηση $(f\circ g)'$ είναι γνησίως αύξουσα.

Για κάθε $x\in(1,2)$, $x-1\in(0,1)\subseteq(0,\pi)$ και $x+1\in(2,3)\subseteq(0,\pi)$.

Έτσι, η συνάρτηση $(f\circ g)'$ είνα συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[x-1,x]$ και $[x,x+1]$, και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα $(x-1,x)$ και $(x,x+1)$. Τότε, από το θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχουν $\xi_1\in(x-1,x)$ και $\xi_2\in(x,x+1)$, τέτοια ώστε

$(f\circ g)'(\xi_1)=\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x-1)}{1}=\frac{1}{\text{ημ}x}-\frac{1}{\text{ημ}(x-1)}$ και

$(f\circ g)'(\xi_2)=\frac{(f\circ g)(x+1)-(f\circ g)(x)}{1}=\frac{1}{\text{ημ}(x+1)}-\frac{1}{\text{ημ}x}$.

Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{(f\circ g)'\uparrow}{\Leftrightarrow}(f\circ g)'(\xi_1)<(f\circ g)'(\xi_2)\Leftrightarrow$

$\frac{1}{\text{ημ}x}-\frac{1}{\text{ημ}(x-1)}<\frac{1}{\text{ημ}(x+1)}-\frac{1}{\text{ημ}x}\Leftrightarrow\frac{2}{\text{ημ}x}<\frac{1}{\text{ημ}(x-1)}+\frac{1}{\text{ημ}(x+1)}$

Δ5i. Το $\lim\limits_{x\to 0}\left[(f\circ g)(x)\cdot\left(f(x)-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\eta\mu x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\dfrac{0}{1\cdot 2}=0$ και

ii. για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|f(x)-\eta\mu x\right|-1}{x}$, για κάθε $x>0$ ισχύουν οι σχέσεις $x^2+1>1\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}>1$ και $\eta\mu x\le 1$, οπότε $f(x)>\eta\mu x\Leftrightarrow f(x)-\eta\mu x>0$, άρα $\left|f(x)-\eta\mu x\right|=f(x)-\eta\mu x$.

Έτσι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|f(x)-\eta\mu x\right|-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-\eta\mu x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\overset{x>0}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

Επίσης, $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\le\left|\dfrac{1}{x}\right|\Leftrightarrow-\left|\dfrac{1}{x}\right|\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\left|\dfrac{1}{x}\right|$, με $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\pm\left|\dfrac{1}{x}\right|\right)=0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής, και το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

Τελικά, το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|f(x)-\eta\mu x\right|-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1-0=1$