

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ (1)**ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2020 (νέα ύλη)****ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ****01 Β**

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x):[0,\pi]\rightarrow\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $f(\pi)+2\sqrt{\pi}=0$ και $f^2(x)+x\cdot(\eta\mu^2x+2\sigma\upsilon\nu x-2)=0$, (1) για κάθε $x\in A=[0,\pi]$

B1.i. Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}\cdot(\sigma\upsilon\nu x-1)$, $x\in[0,\pi]$

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

B3. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,\pi)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0)=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

B4. Να λύσετε την εξίσωση $e^{\sqrt{x}\cdot\eta\mu x}\cdot(e^{f(x)}+\sqrt{x}\cdot\eta\mu x+f(x))=1$

02 Β

Έστω συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισχύει ότι

$$\lim_{x\rightarrow 2}\frac{f(x)-2x+2}{x-2}=1$$

B1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο $(2,2)$.

B3. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(x^2+x)-2)>0$

B4. Να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\alpha) + 3\alpha = e^\alpha$ και ισχύει ότι $e^\alpha > 3\alpha$

B5. Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 2)$ τέτοια ώστε $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$

03 B

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot x^2 - x + \beta, & x \leq 0 \\ x^3 + x^2 + \alpha \cdot x + 1, & x > 0 \end{cases}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η συνεχής

συνάρτηση $g: [-\pi, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, με $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ και $g^2(x) + \sin^2 x = 1$, για κάθε $x \in [-\pi, 0]$

B1. Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής, για τη συνάρτηση f , στο διάστημα $[-1, 1]$.

Για $\beta = -\alpha = 1$,

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

B3. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ και να λύσετε την εξίσωση $f(g(x)) = 1$

B4. Να δείξετε ότι έχει νόημα και να υπολογίσετε χωρίς χρήση του κανόνα de l'Hospital, το $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{g\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{f(g(x)) - 1}$

01 Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $f'(1) = 2$ και

$$f(x) \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \quad (1), \text{ για κάθε } x > 0.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x^2, x \in [0, +\infty)$

Γ2. Υλικό σημείο $M(\alpha, \alpha^2)$, με $\alpha > 0$ κινείται στη γραφική παράσταση της f με την τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2\mu/s$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο M , η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$, στο σημείο $B(x_B, 0)$. Τη χρονική στιγμή που το υλικό σημείο M διέρχεται από το σημείο $(2, 4)$ να βρείτε:

i. Το ρυθμό μεταβολής της απόστασης BM .

ii. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω , που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) της C_f στο M , με τον άξονα $x'x$.

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3f(x) + 4\lambda x = 2\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$

Γ4.i. Να δείξετε ότι η C_g , όπου $g(x) = x \cdot \ln f(x) + f(x) - 2f'(x) \quad x \geq 1$ έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$

ii. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g .

02 Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$ και $f'(x) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου λ θετική παράμετρος.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{\lambda x} - x, x \in \mathbb{R}$

Γ2. Να βρείτε την τιμή του λ , για την οποία η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Γ3.i. Να λύσετε την ανίσωση $e^{4x^2+6} + 1 > e^{2x^2+8} + x^2$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x+1) - (x-1) \cdot f'(x) = f(x+2)$, στο $[1, +\infty)$

Γ4. Έστω $\lambda=1$. Να δείξετε ότι από το σημείο $(0, -1)$ και σε σημείο της C_f με θετική τετμημένη, διέρχεται ακριβώς μια εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f .

03 Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1)+1 = f(3)-27=0$ και $f(x) + x \cdot f'(x) = 3x^2 + 2f'(x)$, για κάθε $x \neq 2$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$, $x \neq 2$

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ3. Να υπολογίσετε τα όρια **i.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(x+1)+1}{f^2(x)-f(x)+1}$ και **ii.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{f(x)}}{f(x)-2x^2}$

Γ4. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $(1, f(1))$ και να εξετάσετε αν η (ε) έχει άλλα κοινά σημεία με τη C_f

Γ5.i. Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$, όπου $g(x) = \ln x$, $x > 0$ και να εξετάσετε αν οι συνάρτησεις $g \circ f$ και h , όπου $h(x) = 3g(x) - g(x-2)$, είναι ίσες.

ii. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in D_{g \circ f}$ ισχύει ότι $(g \circ f)(x) \leq x^2 + 2x + 3 + \frac{8}{x-2}$ και ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in D_{g \circ f}$, για το οποίο ισχύει η ισότητα.

04 Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: A = (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{x}{1+\ln^2 x}$ και $f(A) = (0, +\infty)$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Γ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ και να δείξετε ότι η C_f είναι κάτω από την (ε) , εκτός του σημείου επαφής.

Γ3. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Γ4.i. Έστω $g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$. Να λύσετε την ανίσωση $(f \circ g)(x) > 1$

ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{f(x) \cdot [(f \circ g)(x) - 1]}$

01 Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη, με $f(0) = 1$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $f(f(x)) = 4x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1).

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ2. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$, **i.** Να υπολογίσετε την τιμή του λ και

ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(4x-1)}{x}$

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε $f''(\kappa) = 0$

Δ4. Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το σημείο στο οποίο η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της C_g στο σημείο αυτό.

02 Δ

Δ1. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύουν $e^{\beta x} + x^2 + \alpha x \geq 1$, για

κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\beta x^3 + 2\alpha + 1}{3(x^2 - 1)} = \frac{1}{2}$

Έστω $f(x) = e^x + x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2. Να δείξετε ότι από το σημείο $O(0,0)$ άγονται ακριβώς δυο εφαπτόμενες προς τη γραφική παράσταση της f .

Δ3. Να δείξετε ότι είναι καλώς ορισμένα και να υπολογίσετε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f^2(x) - f(x) + 1} - 1}{\ln(f(x))^{f(x)} + 2f(x)}$ και **ii.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3^{f(x)} \cdot \eta\mu 3^{-f(x)})$

Δ4.i. Να λύσετε την ανίσωση $x^{\ln x} + \ln^4 x > e + \ln^2 x$.

ii. Να δείξετε ότι για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha \neq \beta$, η εξίσωση $\frac{f(x)}{x-\alpha} + \frac{f(x)}{x-\beta} = 2$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

03 Δ

Έστω η συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση

$$f^3(x) + e^{f(x)} + \varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} + e^{\varepsilon\varphi x}, \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Δ2.i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^2(x)}{f(x) + x \cdot f'(x)}$

ii. Να δείξετε ότι για τυχαία $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ με $\alpha < \beta$, υπάρχει μοναδικό

$x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\varepsilon\varphi x_0 = -\sqrt{\varepsilon\varphi \alpha \cdot \varepsilon\varphi \beta}$.

Υλικό σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ ξεκινά από το σημείο $P\left(-\frac{\pi}{3}, -\sqrt{3}\right)$ και κινείται επί της C_f , με την τετμημένη του να αυξάνεται σταθερά. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της A , τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(x_B, 0)$ και έστω ω η γωνία της με τον άξονα $x'x$.

Δ3. Να δείξετε ότι τη χρονική στιγμή που το σημείο A διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας ω είναι αριθμητικά μικρότερος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του.

Δ4. Να βρείτε τα σημεία της C_f , στα οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης τους ισούται με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου $B(x_B, 0)$

ΛΥΣΕΙΣ

01 B

B1.i. Για κάθε $x \in A = [0, \pi]$ η σχέση $f^2(x) + x \cdot (\eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x - 2) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f^2(x) + x \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x - 2) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - x \cdot (\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f^2(x) = x \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \quad (2).$ Η εξίσωση $f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Για $x \in (0, \pi]$ είναι $f^2(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο στο $(0, \pi]$. Είναι $f(\pi) + 2\sqrt{\pi} = 0 \Leftrightarrow f(\pi) = -2\sqrt{\pi} < 0$ οπότε είναι και $f(x) < 0$ για $x \in (0, \pi]$. Τότε από τη σχέση (2) προκύπτει

$|f(x)| = \sqrt{x} \cdot |\sin x - 1| \Leftrightarrow -f(x) = \sqrt{x} \cdot (1 - \sin x) \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x} \cdot (\sin x - 1)$, είναι και $f(0) = 0$, άρα $f(x) = \sqrt{x} \cdot (\sin x - 1)$, $x \in [0, \pi]$

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\sin x - 1) - \sqrt{x} \cdot \eta\mu x = -\left(\frac{1 - \sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x\right) < 0$.

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = [0, \pi]$.

Επομένως, το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = [f(\pi), f(0)] = [-2\sqrt{\pi}, 0]$

B2. Η συνάρτηση f εφάπτεται στον άξονα $x'x$, αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in [0, \pi]$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ και $f'(x_0) = 0$.

Η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot (\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow^{x \in [0, \pi]} x = 0$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \cdot (\sin x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} \cdot \frac{\sin x - 1}{x} \right) = 0 \cdot 0 = 0$.

Άρα $f'(0) = 0$. Επομένως η ευθεία $y = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο της $O(0, 0)$

B3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$. Άρα, από το θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{\pi} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

B4. Η εξίσωση $e^{\sqrt{x} \cdot \eta\mu x} \cdot (e^{f(x)} + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x + f(x)) = 1$ ορίζεται στο $[0, \pi]$ και γράφεται ισοδύναμα $e^{f(x)} + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x + f(x) = e^{-\sqrt{x} \cdot \eta\mu x} \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = e^{-\sqrt{x} \cdot \eta\mu x} - \sqrt{x} \cdot \eta\mu x$ (3)

Έστω η συνάρτηση $h(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $h'(x) = e^x + 1 > 0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1-1.

Τότε η εξίσωση (3) $\Leftrightarrow h(f(x)) = h(-\sqrt{x} \cdot \eta\mu x) \Leftrightarrow^{h \text{ 1-1}} f(x) = -\sqrt{x} \cdot \eta\mu x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot (\sin x - 1) + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot (\eta\mu x + \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \text{ ή } \eta\mu x + \sin x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu^2 x + \sin^2 x + 2\eta\mu x \cdot \sin x = 1 \\ \eta\mu x + \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x \cdot \sin x = 0 \\ \eta\mu x + \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x = 0 \\ \text{και} \\ \sigma\upsilon\nu x = 1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x = 0 \\ \text{και} \\ \eta\mu x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, \text{ ή } x = \frac{\pi}{2}$$

02 B

B1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα $f(0) = 0$. Έστω $g(x) = \frac{f(x) - 2x + 2}{x - 2}$, $x \neq 2$, άρα $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$ και

$$f(x) = (x - 2) \cdot g(x) + 2x - 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [(x - 2) \cdot g(x) + 2x - 2] = 0 \cdot 1 + 4 - 2 = 2$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής και στο 2, οπότε $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. Έστω ότι είναι γνησίως γνησίως φθίνουσα.

Τότε $0 < 2 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(0) > f(2) \Leftrightarrow 0 > 2$: άτοπο. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

B2. Είναι $f(2) = 2$, επομένως το σημείο $(2, 2) \in C_f$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2) \cdot g(x) + 2x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2) \cdot (g(x) + 2)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (g(x) + 2) = 1 + 2 = 3. \text{ Άρα υπάρχει η } f'(2) = 3. \text{ Επομένως, η εφαπτομένη της}$$

C_f στο $(2, 2)$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow (\varepsilon): y = 3x - 4$

B3. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι και 1-1. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη της f , στο σύνολο $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Η ανίσωση

$$f^{-1}(f(x^2 + x) - 2) > 0 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(f(x^2 + x) - 2)) > f(0) \Leftrightarrow f(x^2 + x) - 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^2 + x) > 2 \Leftrightarrow f(x^2 + x) > f(2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 + x > 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -2, \quad \text{ή} \\ x > 1$$

B4. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) + 3x - e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση φ είναι

συνεχής, σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Επομένως η φ είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

Επίσης, ισχύουν: $\varphi(0) = f(0) + 0 - 1 = -1 < 0$ και $\varphi(2) = f(2) + 6 - e^2 = 8 - e^2 > 0$, άρα $\varphi(0) \cdot \varphi(2) < 0$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $\alpha \in (0, 2)$, τέτοιο ώστε $\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) + 3\alpha = e^\alpha$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, επομένως, $\alpha > 0 \Leftrightarrow f(\alpha) > f(0) \Leftrightarrow e^\alpha - 3\alpha > 0 \Leftrightarrow e^\alpha > 3\alpha$

B5. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και $0 = f(0) < 1 < f(2) = 2$. Άρα, από το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, 2]$ και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα $(0, x_0)$ και $(x_0, 2)$. Άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχουν $\xi_1 \in (0, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, 2)$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{1}{x_0} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} = \frac{2 - 1}{2 - x_0} = \frac{1}{2 - x_0}.$$

Επομένως, είναι $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = x_0 + 2 - x_0 = 2$

03 B

B1. Για να να εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής, για τη συνάρτηση f , στο διάστημα $[-1, 1]$, είναι αναγκαίο η f να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο 0 .

Πρέπει δηλαδή να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \beta = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha \cdot x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha \cdot x - 1) = -1 \text{ και}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x^2 + \alpha \cdot x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x + \alpha) = \alpha$. Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο 0 , όταν $\alpha = -1$ και $\beta = 1$. Η f είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική. Άρα είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και στο $[-1, 1]$ και άρα εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα αυτό για την f , για $\alpha = -1$ και $\beta = 1$. Για $\beta = -\alpha = 1$,

B2. Είναι $f'(x) = \begin{cases} -2x-1 = -2\left(x+\frac{1}{2}\right), & x < 0 \\ 3x^2+2x-1 = 3(x+1)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right), & x > 0 \end{cases}$ Ο πίνακας προσήμων

της $f'(x)$ και μεταβολών της μονοτονίας της συνάρτησης f είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f						

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

Είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ και $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ και εφόσον είναι συνεχής στο 0 , είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$.

Τέλος, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

B3. Για κάθε $x \in [-\pi, 0]$, η σχέση $g^2(x) + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow g^2(x) = 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow \Leftrightarrow g^2(x) = \eta\mu^2 x$. Έστω $g^2(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \stackrel{x \in [-\pi, 0]}{\Leftrightarrow} x = -\pi, \text{ ή } x = 0$. Άρα για κάθε $x \in (-\pi, 0)$, είναι $g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής, οπότε διατηρεί πρόσημο στο $(-\pi, 0)$. Δίνεται ότι $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$, άρα είναι $g(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\pi, 0)$. Τότε η παραπάνω σχέση: $g^2(x) = \eta\mu^2 x \Leftrightarrow |g(x)| = |\eta\mu x| \stackrel{\eta\mu x \leq 0}{\Leftrightarrow} -g(x) = -\eta\mu x \Leftrightarrow g(x) = \eta\mu x, x \in [-\pi, 0]$

Το σύνολο $\{x \in [-\pi, 0] / \eta\mu x > 0\} = \emptyset$. Αντίθετα το $\{x \in [-\pi, 0] / \eta\mu x \leq 0\} = [-\pi, 0]$. Επομένως, ορίζεται στο σύνολο $[-\pi, 0]$, η συνάρτηση $f \circ g$, με τύπο

$$(f(g(x))) = f(\eta\mu x) = -\eta\mu^2 x - \eta\mu x + 1$$

$$\text{Τότε η εξίσωση } f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow -\eta\mu^2 x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x \cdot (\eta\mu x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \text{ ή } \eta\mu x = -1 \stackrel{x \in [-\pi, 0]}{\Leftrightarrow} x = -\pi \text{ ή } x = -\frac{\pi}{2} \text{ ή } x = 0.$$

B4. Η συνάρτηση $g\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ορίζεται στο σύνολο

$$\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{2} + x \in [-\pi, 0]\right\} = \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right],$$

εφόσον $-\pi \leq \frac{\pi}{2} + x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$. Η $f(g(x))$ ορίζεται στο $[-\pi, 0]$.

Άρα, σύμφωνα και με το **B2.** το $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{g\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{f(g(x)) - 1}$ έχει νόημα, εφόσον η συνάρτηση

$$\frac{g\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{f(g(x)) - 1} \text{ ορίζεται στο σύνολο } \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Τότε είναι : } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{g\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{f(g(x)) - 1} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{-\eta\mu^2 x - \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{-\eta\mu x \cdot (\eta\mu x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot (1 - \eta\mu x)}{-\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \eta\mu x}{-\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{1 - \eta\mu x}{-\eta\mu x} \right) = (-\infty) \cdot \frac{1+1}{1} = -\infty \end{aligned}$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x < 0$ για $x < -\frac{\pi}{2}$, κοντά στο $-\frac{\pi}{2}$, οπότε

$$\text{το } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = -\infty$$

01 Γ

Γ1. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι για κάθε $x > 0$, είναι $f(x) > 0$, ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f'(x) = \frac{2}{x}$, όπως επίσης και ότι $-\frac{1}{x^2} \cdot f(x) \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x}$. Με πρόσθεση κατά μέλη των δυο τελευταίων σχέσεων, προκύπτει ότι

$$f'(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \cdot f(x) \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 0 \Leftrightarrow \text{υπάρχει } c_1 \in \mathbb{R},$$

τέτοιο ώστε για κάθε $x > 0$, $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = c_1$. Είναι $f'(1) = 2$ οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει $f(1) \cdot f'(1) = 2 \Leftrightarrow f(1) \cdot 2 = 2 \Leftrightarrow f(1) = 1$. Έτσι, από την τελευταία σχέση, αντικαθιστώντας προκύπτει $f(1) \cdot f(1) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1$. Τότε $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

$$\text{Άρα } \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f'(x)}{f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{2}{x}}{1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow (\ln f(x))' = (2 \ln x)' \Leftrightarrow \text{υπάρχει } c_2 \in \mathbb{R},$$

τέτοιο ώστε για κάθε $x > 0$, $\ln f(x) = 2 \ln x + c_2$. Για $x = 1$ προκύπτει $c_2 = 0$. Άρα

$$\ln f(x) = \ln x^2 \Leftrightarrow f(x) = x^2, x > 0. \text{ Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής, άρα } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0. \text{ Τελικά, } f(x) = x^2, x \in [0, +\infty).$$

Γ2.i. Για κάθε $x > 0$, είναι $f'(x) = 2x$. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $M(\alpha, \alpha^2)$ έχει εξίσωση (ε): $y - f(\alpha) = f'(\alpha) \cdot (x - \alpha) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\varepsilon): y = \alpha^2 + 2\alpha \cdot (x - \alpha) \Leftrightarrow y = 2\alpha x - \alpha^2$. Η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$, στο σημείο $B(x_B, 0)$, άρα είναι $0 = 2\alpha x_B - \alpha^2 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} x_B = \frac{\alpha}{2}$. Επομένως είναι $B\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$.

$$\text{Έστω } d = BM \Rightarrow d = \sqrt{\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + (\alpha^2 - 0)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha^4} \quad \text{Όταν το υλικό σημείο}$$

κινείται στη C_f , τότε η τετμημένη του μεταβάλλεται με το χρόνο, οπότε και η απόσταση BM μεταβάλλεται με το χρόνο. Άρα είναι

$$d(t) = \sqrt{\frac{\alpha^2(t)}{4} + \alpha^4(t)} \Rightarrow d'(t) = \frac{\frac{\alpha(t)}{2} + 4\alpha^3(t)}{2\sqrt{\frac{\alpha^2(t)}{4} + \alpha^4(t)}} \cdot \alpha'(t). \text{ Τη χρονική στιγμή } t_0$$

που το σημείο M διέρχεται από το σημείο με τετμημένη $\alpha(t_0) = 2\mu$, ο ρυθμός

$$\text{μεταβολής της } d \text{ είναι } d'(t_0) = \frac{\frac{\alpha(t_0)}{2} + 4\alpha^3(t_0)}{2\sqrt{\frac{\alpha^2(t_0)}{4} + \alpha^4(t_0)}} \cdot \alpha'(t_0) = \frac{1+4 \cdot 8}{2\sqrt{1+16}} \cdot 2 = \frac{33}{\sqrt{17}} \mu/s$$

ii. Είναι $\varepsilon\varphi\omega = f'(\alpha) = 2\alpha \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega(t) = 2\alpha(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \omega(t)} \cdot \omega'(t) = 2 \cdot \alpha'(t) \Rightarrow (1 + \varepsilon\varphi^2 \omega(t)) \cdot \omega'(t) = 2 \cdot \alpha'(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (1 + 4\alpha^2(t)) \cdot \omega'(t) = 2 \cdot \alpha'(t)$. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_0 που το υλικό σημείο διέρχεται από το $(2, 4)$, αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση προκύπτει

$$\text{οτι } (1 + 4\alpha^2(t_0)) \cdot \omega'(t_0) = 2 \cdot \alpha'(t_0) \Rightarrow (1 + 4 \cdot 4) \cdot \omega'(t_0) = 2 \cdot 2 \Rightarrow \omega'(t_0) = \frac{4}{17} \text{ rad/s}$$

Γ3. Για $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $3f(x) + 4\lambda x = 2\lambda + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 4\lambda x - (2\lambda + 1) = 0, x \geq 0$

Έστω η συνάρτηση $F(x) = x^3 + 2\lambda \cdot x^2 - (2\lambda + 1) \cdot x, x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$F'(x) = 3x^2 + 4\lambda x - (2\lambda + 1). \text{ Η συνάρτηση } F \text{ είναι συνεχής στο } [0, 1],$$

παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και ισχύει $F(0) = F(1) = 0$. Άρα, από το θεώρημα του

Rolle, υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 + 4\lambda\xi - (2\lambda + 1) = 0$

Γ4.i. Η συνάρτηση $g(x) = x \cdot \ln f(x) + f(x) - 2f'(x) \quad x \geq 1$ γράφεται ισοδύναμα:

$$g(x) = x \cdot \ln x^2 + x^2 - 4x = 2x \cdot \ln x + x^2 - 4x, \quad x \geq 1 \text{ και είναι συνεχής. Για κάθε } x > 1,$$

$$\text{είναι } g'(x) = 2\ln x + 2 + 2x - 4 = 2(\ln x + x - 1) > 0, \text{ γιατί για } x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0, x - 1 > 0$$

Άρα η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Τότε το σύνολο τιμών της είναι το

$$\text{διάστημα } g([1, +\infty)) = \left[g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = [-3, +\infty), \quad \text{εφόσον είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \left(1 - \frac{4}{x} \right) \right] = (+\infty) \cdot (+\infty) + (+\infty) \cdot (1 - 0) = +\infty.$$

Το $0 \in g([1, +\infty))$ και η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα υπάρχει

μοναδικό $x_0 > 1$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$. Άρα η C_g έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$

ii. Για $x \geq 1$, η εξίσωση $g(x) = f(x) \Leftrightarrow 2x \cdot \ln x + x^2 - 4x = x^2 \Leftrightarrow 2x \cdot \ln x = 4x \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$. Άρα μοναδικό κοινό σημείο των C_f, C_g είναι το σημείο (e^2, e^4)

Έστω $g(x) > f(x) \Leftrightarrow 2x \cdot \ln x + x^2 - 4x > x^2 \Leftrightarrow 2x \cdot \ln x > 4x \Leftrightarrow \ln x > 2 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^2 \Leftrightarrow x > e^2$. Άρα η C_g είναι πάνω από τη C_f στο διάστημα $(e^2, +\infty)$. Κατά συνέπεια, η C_g είναι κάτω από τη C_f στο διάστημα $[1, e^2)$.

02 Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot x - 1 \Leftrightarrow f'(x) + 1 = \lambda \cdot (f(x) + x)$ (1). Θέτω $g(x) = f(x) + x$. Τότε η (1) $\Leftrightarrow g'(x) = \lambda \cdot g(x) \Leftrightarrow g'(x) - \lambda \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda x} g'(x) - \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-\lambda x} \cdot g(x))' = 0 \Leftrightarrow$ υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $e^{-\lambda x} \cdot g(x) = c$. Είναι $g(0) = f(0) = 1$, οπότε αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση προκύπτει ότι $c = 1$.

Τότε $e^{-\lambda x} \cdot g(x) = 1 \Leftrightarrow g(x) = e^{\lambda x} \Leftrightarrow f(x) = e^{\lambda x} - x, x \in \mathbb{R}$

Γ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x} - 1 = \lambda \cdot \left(e^{\lambda x} - \frac{1}{\lambda} \right)$.

Η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda x = -\ln \lambda \Leftrightarrow x = -\frac{\ln \lambda}{\lambda}$.

Ο πίνακας προσήμων της $f'(x)$ και μεταβολών της συνάρτησης f είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{\ln \lambda}{\lambda}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	↘ O.E. ↗		

Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\ln \lambda}{\lambda}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -\frac{\ln \lambda}{\lambda}$, ίσο με $f\left(-\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} + \frac{\ln \lambda}{\lambda} = \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda}$.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(\lambda) = \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda}$, $\lambda > 0$.

Για κάθε $\lambda > 0$, ισχύει ότι $\ln \lambda \leq \lambda - 1$, με την ισότητα μόνο για $\lambda = 1$. Επομένως $1 + \ln \lambda \leq \lambda \Leftrightarrow \frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} \leq 1 \Leftrightarrow \varphi(\lambda) \leq \varphi(1) = 1$. Άρα η συνάρτηση φ παίρνει τη μέγιστη τιμή της 1, για $\lambda = 1$.

Εναλλακτικά, για κάθε $\lambda > 0$, $\varphi'(\lambda) = \frac{1 - \ln \lambda - 1}{\lambda^2} = -\frac{\ln \lambda}{\lambda^2}$. Είναι $\varphi'(1) = 0$. Για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ είναι $\varphi'(\lambda) > 0$, άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$. Και για κάθε $\lambda \in (1, +\infty)$ είναι $\varphi'(\lambda) < 0$, άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Άρα η συνάρτηση φ παίρνει μέγιστη τιμή για $\lambda = 1$, το $\varphi(1) = 1$.

Γ3.i. Η ανίσωση $e^{4x^2+6} + 1 > e^{2x^2+8} + x^2$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και γράφεται ισοδύναμα $e^{2(2x^2+3)} - 2x^2 - 3 > e^{2(x^2+4)} - x^2 - 4 \Leftrightarrow f(2x^2+3) > f(x^2+4)$, για $\lambda = 2$. (1)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $2x^2 + 3 > 0$, $x^2 + 4 > 0$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty) \subseteq \left(-\frac{\ln 2}{2}, +\infty\right)$.

Έτσι, η ανίσωση (1) $\Leftrightarrow 2x^2 + 3 > x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$

ii. Η εξίσωση $f(2x+1) - (x-1) \cdot f'(x) = f(x+2)$ ορίζεται στο $[1, +\infty)$ και γράφεται ισοδύναμα $f(2x+1) - f(x+2) = (x-1) \cdot f'(x)$ (2).

Το $x=1$ είναι λύση, γιατί την επαληθεύει.

Για $x > 1 \Leftrightarrow 2x+1 > x+2$, η σχέση (2) $\Leftrightarrow \frac{f(2x+1) - f(x+2)}{x-1} = f'(x)$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[x+2, 2x+1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x+2, 2x+1)$. Άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει

$$\xi \in (x+2, 2x+1) \text{ , τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(2x+1) - f(x+2)}{x-1} \Leftrightarrow f'(\xi) = f'(x) :$$

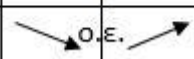
αδύνατη, γιατί $f''(x) = \lambda^2 \cdot e^{2x} > 0, x \in \mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, το $x=1$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης.

Γ4. Για $\lambda=1$, είναι $f(x) = e^x - x, x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f . Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της M έχει εξίσωση (ε): $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ και διέρχεται από το σημείο $(0, -1)$, αν και μόνο αν $-1 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (-x_0) \Leftrightarrow 1 + f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 \Leftrightarrow$

$$1 + e^{x_0} - x_0 = x_0 \cdot e^{x_0} - x_0 \Leftrightarrow x_0 \cdot e^{x_0} - e^{x_0} - 1 = 0 \quad (3). \quad \text{Έστω η συνάρτηση}$$

$$h(x) = (x-1) \cdot e^x - 1, x \in \mathbb{R} \quad , \quad \text{άρα} \quad h'(x) = e^x + (x-1) \cdot e^x = x \cdot e^x, x \in \mathbb{R}.$$

Είναι $h'(0) = 0$. Ο πίνακας προσήμων της $h'(x)$ και μεταβολών της h είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
h			

Η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_2 = [0, +\infty)$, άρα το σύνολο των τιμών της στο A_2 είναι

$$h(A_2) = \left[h(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = [-2, +\infty). \text{ Το } 0 \in h(A_2) \text{ και η}$$

συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο

$A_2 = [0, +\infty)$. Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$, τέτοιο ώστε

$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1) \cdot e^{x_0} - 1 = 0$, οπότε υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της C_f σε σημείο της με θετική τετμημένη, που διέρχεται από το σημείο $(0, -1)$

03 Γ

Γ1. Για κάθε $x \neq 2$, η δοσμένη σχέση $f(x) + x \cdot f'(x) = 3x^2 + 2f'(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) + (x-2) \cdot f'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow ((x-2) \cdot f(x))' = (x^3)' \Leftrightarrow \text{υπάρχουν } c_1, c_2 \in \mathbb{R} ,$$

$$\text{ώστε } (x-2) \cdot f(x) = \begin{cases} x^3 + c_1, & x < 2 \\ x^3 + c_2, & x > 2 \end{cases} . \text{ Για } x=1 \text{ προκύπτει } -f(1) = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

και για $x=3$ προκύπτει $f(3) = 27 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$.

Άρα $(x-2) \cdot f(x) = x^3, x \neq 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{x-2}, x \neq 2$

Γ2. Για κάθε $x \neq 2$, είναι $f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x-2) - x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 \cdot (x-3)}{(x-2)^2}$.

Είναι $f'(0) = f'(3) = 0$ Ο πίνακας των προσήμων της $f'(x)$ και των μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
f	$\nearrow$		$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2)$. Είναι επίσης γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$
Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, για $x = 3$, το $f(3) = 27$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x^3 \cdot \frac{1}{x-2} \right) = 8 \cdot (-\infty) = -\infty$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 2)$, άρα το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι $f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Έστω

$A_2 = (2, +\infty)$. Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = A_1 \cup A_2 = \mathbb{R} - \{2\}$. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \mathbb{R} \cup f(A_2) = \mathbb{R}$

Γ3.i. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f^2(x) - f(x) + 1) \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} (u^2 - u + 1) = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 = +\infty,$$

επομένως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f^2(x) - f(x) + 1} = 0$.

Είναι $\left| \frac{\eta\mu(x+1)+1}{f^2(x)-f(x)+1} \right| \leq \frac{|\eta\mu(x+1)|+1}{|f^2(x)-f(x)+1|} \leq \frac{2}{|f^2(x)-f(x)+1|}$, άρα

$$-\frac{2}{|f^2(x)-f(x)+1|} \leq \frac{\eta\mu(x+1)+1}{f^2(x)-f(x)+1} \leq \frac{2}{|f^2(x)-f(x)+1|} \text{ και ισχύει:}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\pm \frac{2}{|f^2(x) - f(x) + 1|} \right) = 0$. Τότε, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, είναι

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(x+1)+1}{f^2(x) - f(x) + 1}$

ii. Όταν το $x > 2$ ορίζεται το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{f(x)}}{f(x) - 2x^2}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{f(x)-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln x^{f(x)-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(f(x)-2) \cdot \ln x} \stackrel{u=(f(x)-2) \cdot \ln x}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty, \text{ εφόσον είναι}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(f(x) - 2) \cdot \ln x] = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$. Τότε το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{f(x)}}{f(x) - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{f(x)}}{x^2 \left(\frac{f(x)}{x^2} - 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{f(x)-2} \cdot \frac{1}{\frac{f(x)}{x^2} - 2} \right) = (+\infty) \cdot \frac{1}{1-2} = -\infty.$$

Γ4. Είναι $f(1) = -1$ και $f'(1) = -4$. Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(1, -1)$ είναι η ευθεία με εξίσωση: $(\varepsilon): y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = -4 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = -4x + 3$

Για $x \neq 2$, έστω $f(x) = -4x + 3 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x-2} = -4x + 3 \Leftrightarrow x^3 = -4x^2 + 8x + 3x - 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 11x + 6 = 0 \stackrel{\text{Horner}}{\Leftrightarrow} (x-1) \cdot (x^2 + 5x - 6) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot (x+6) = 0 \Leftrightarrow x=1$$

ή $x = -6$. Άρα και το σημείο $(-6, 27)$ είναι κοινό σημείο της (ε) με την C_f

Γ5.i. Το σύνολο $\{x \neq 2 / f(x) > 0\} = \left\{x \neq 2 / \frac{x^3}{x-2} > 0\right\} = \{x \neq 2 / x \cdot (x-2) > 0\} =$

$= (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \neq \emptyset$, άρα ορίζεται στο $D_{f \circ g} = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ η συνάρτηση

$$g \circ f, \text{ με τύπο } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x^3}{x-2}\right) = \ln \frac{x^3}{x-2} . \text{ Η συνάρτηση με τύπο}$$

όπου $h(x) = 3g(x) - g(x-2)$ ορίζεται για $x-2 > 0 \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$. Είναι $D_{g \circ f} \neq D_h$

άρα $g \circ f \neq h$

ii. Εφόσον είναι $\ln x \leq x-1$, $x > 0$, για κάθε $x \in D_{g \circ f} = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, ισχύει ότι $(g \circ f)(x) = \ln \frac{x^3}{x-2} \leq \frac{x^3}{x-2} - 1 = \frac{x^3 - x + 2}{x-2} = x^2 + 2x + 3 + \frac{8}{x-2}$, εκτελώντας τη διαίρεση. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $f(x) = 1$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ οπότε είναι $f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$. Το $1 \in (0, +\infty)$, άρα υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 \in \Delta_1$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1$. Στο διάστημα $\Delta_2 = (2, +\infty)$, η συνάρτηση f παρουσιάζει τ.ελάχιστο για $x=3$, το $f(3) = 27$. Άρα για κάθε $x \in \Delta_2$, είναι $f(x) \geq f(3) = 27 > 1$. Επομένως, η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική λύση $x_0 \in (-\infty, 0)$, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_0 \in D_{g \circ f}$ για το οποίο ισχύει η ισότητα.

04 Γ

Γ1. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \frac{1 + \ln^2 x - x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(1 + \ln^2 x)^2} = \frac{(\ln x - 1)^2}{(1 + \ln^2 x)^2} \geq 0$, με

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ μόνο, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, άρα κρίσιμα σημεία της είναι μόνο εκεί όπου $f'(x) = 0$, άρα μόνο το $x = e$

Γ2. Έστω σημείο $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f . Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M έχει εξίσωση $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αν και μόνο αν ισχύει:

$$-f(x_0) = f'(x_0) \cdot (-x_0) \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 \cdot f'(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0}{1 + \ln^2 x_0} = \frac{x_0 \cdot (\ln x_0 - 1)^2}{(1 + \ln^2 x_0)^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{(\ln x_0 - 1)^2}{1 + \ln^2 x_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \ln^2 x_0 = \ln^2 x_0 - 2 \ln x_0 + 1 \Leftrightarrow -2 \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Είναι $f(1) = f'(1) = 1$. Άρα $(\varepsilon): y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y = x$

Για κάθε $x > 0$, είναι $1 + \ln^2 x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \ln^2 x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1 + \ln^2 x} \leq x \Leftrightarrow f(x) \leq x$, με την ισότητα μόνο όταν $\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από την (ε) , εκτός του σημείου επαφής $(1, 1)$.

Γ3. Η συνάρτησης f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι και $1-1$. Επομένως, ορίζεται η αντίστροφή της στο σύνολο $D_{f^{-1}} = f(A) = (0, +\infty)$. Έστω ότι υπάρχει

$x_1 > 0$, τέτοιο ώστε $f^{-1}(x_1) < x_1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x_1)) < f(x_1) \Leftrightarrow f(x_1) > x_1$: άτοπο, γιατί είναι $f(x) \leq x$, για κάθε $x > 0$. Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f^{-1}(x) \geq x \geq f(x)$

οπότε η ισότητα $f^{-1}(x) = x = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{1 + \ln^2 x} = x \Leftrightarrow 1 + \ln^2 x = 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Επομένως το μοναδικό κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι το σημείο $(1, 1)$.

Γ4.i. Το σύνολο $\{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} / e^x > 0\} = \mathbb{R}$, άρα ορίζεται στο

$D_{f \circ g} = \mathbb{R}$ η $f \circ g$, με τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{e^x}{1 + x^2}$. Είναι $(f \circ g)(0) = 1$.

Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = e^x > 0$, $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \geq 0$, με

$(f(g(x)))' = 0 \Leftrightarrow f'(g(x)) \Leftrightarrow x = 1$ μόνο, άρα η συνάρτηση $f \circ g$ είναι γνησίως

αύξουσα. Τότε η ανίσωση $(f \circ g)(x) > 1 \Leftrightarrow (f \circ g)(x) > (f \circ g)(0) \Leftrightarrow x > 0$

ii. Είναι $(f \circ g)(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(f \circ g)(x) - 1] = 0$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(f \circ g)(x) - 1} = +\infty.$$

Τότε το ζητούμενο όριο είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{f(x) \cdot [(f \circ g)(x) - 1]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \cdot (1 + \ln^2 x)}{x \cdot [(f \circ g)(x) - 1]} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{x} \cdot (1 + \ln^2 x) \cdot \frac{1}{(f \circ g)(x) - 1} \right) = (+\infty) \cdot (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ γιατί τα όρια:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} [u \cdot (e^u - 1)] = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln^2 x) = +\infty$$

01 Δ

Δ1. Από τη σχέση (1), για $x=0$ προκύπτει $f(f(0)) = -1 \Leftrightarrow f(1) = -1$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, οπότε από τη σχέση (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι $f'(f(x)) \cdot f'(x) = 4 > 0$, άρα είναι $f'(x) \neq 0$. Επίσης, η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, άρα η f' είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής. Επομένως η f' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Τότε, από το θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει

$$\xi \in (0,1), \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1} = -1 - 1 = -2 < 0. \text{ Επομένως είναι}$$

$f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ2.i. Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα το $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$. Επομένως είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$$\text{Έτσι, } \lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4f(x)}{f(f(x)) + 1} \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{4u}{f(u) + 1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{4}{\frac{f(u)}{u} + \frac{1}{u}} = \frac{4}{\lambda}.$$

Άρα $\lambda = \frac{4}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$, ή $\lambda = -2$. Το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, άρα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x_0) = 0. \text{ Από τη σχέση (1) προκύπτει } f(0) = 4x_0 - 1 \Leftrightarrow 1 = 4x_0 - 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}. \text{ Για}$$

κάθε $x > \frac{1}{2} \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) < 0$, άρα $\frac{f(x)}{x} < 0$, οπότε είναι και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 0. \text{ Επομένως, είναι } \lambda = -2$$

ii. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(4x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(f(f(x)))}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4f(x)-1}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 \cdot \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} \right) = 4 \cdot (-2) - 0 = -8$$

Δ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ και $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ και $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Τότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχουν $\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)}{\frac{1}{2}} = -2 \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2. \text{ Η συνάρτηση}$$

f' είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και είναι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = -2$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\kappa \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\kappa) = 0$

Δ4. Είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Άρα η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $g'(x) = \frac{(f'(x))^2 - f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$, άρα

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(f'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 - 0}{\left(f'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} = 1. \text{ Επομένως, η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση}$$

$$(\varepsilon): y - g\left(\frac{1}{2}\right) = g'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = x - \frac{1}{2}$$

02 Δ

Δ1. Έστω $g(x) = e^{\beta x} + x^2 + \alpha x$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε $g(0) = 1$.

Τότε $e^{\beta x} + x^2 + \alpha x \geq 1 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$. Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει ακρότατο (ελάχιστο), για $x = 0$. Είναι παραγωγίσιμη, με $g'(x) = \beta \cdot e^{\beta x} + 2x + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$.

Άρα, από το θεώρημα του Fermat, είναι $g'(0) = 0 \Leftrightarrow \beta + \alpha = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha$ (1)

Επίσης, είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\beta x^3 + 2\alpha + 1}{3(x^2 - 1)} = \frac{1}{2}$. Θέτω $\kappa(x) = \frac{\beta x^3 + 2\alpha + 1}{3(x^2 - 1)}$, $x \neq \pm 1$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \kappa(x) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \text{τότε}$$

$$\beta x^3 + 2\alpha + 1 = 3(x^2 - 1) \cdot \kappa(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (\beta x^3 + 2\alpha + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} [3(x^2 - 1) \cdot \kappa(x)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta + 2\alpha + 1 = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -\alpha + 2\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

Δ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + 2x - 1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ είναι $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Η ευθεία (ε) διέρχεται από το $O(0,0)$, αν και μόνο αν

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 \cdot f'(x_0) \Leftrightarrow e^{x_0} + x_0^2 - x_0 = x_0 \cdot e^{x_0} + 2x_0^2 - x_0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)e^{x_0} + x_0^2 = 0 \quad (2)$$

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = (x-1)e^x + x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε η $(2) \Leftrightarrow \varphi(x_0) = 0$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi'(x) = x \cdot e^x + 2x = x \cdot (e^x + 2)$.

Ο πίνακας προσήμων της $\varphi'(x)$ και μεταβολών της φ είναι:

Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$, το $\varphi(0) = -1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
φ			

Επίσης είναι $\varphi(-1) = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e} > 0$ και $\varphi(1) = 1 > 0$. Έτσι, η

συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και $\varphi(-1) \cdot \varphi(0) < 0$. Άρα, από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_1) = 0$, το οποίο είναι μοναδικό στο διάστημα $(-\infty, 0)$, στο οποίο η φ είναι γνησίως φθίνουσα.

Ομοίως, η φ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και $\varphi(0) \cdot \varphi(1) < 0$. Άρα, από το θ. Bolzano, υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_2) = 0$, το οποίο είναι μοναδικό στο διάστημα $(0, +\infty)$, στο οποίο η φ είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες. Επομένως, από το σημείο $O(0,0)$ άγονται ακριβώς δυο εφαπτόμενες της C_f .

Δ3.i. Το $D_f = \mathbb{R}$ και $f^2(x) - f(x) + 1 = \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, άρα έχει νόημα η παράσταση $\sqrt{f^2(x) - f(x) + 1}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, άρα

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$. Επομένως είναι $f(x) > 0$ κοντά στο $+\infty$, άρα ορίζεται στο $+\infty$ η συνάρτηση $\ln(f(x))^{f(x)} + 2f(x)$. Επομένως, είναι καλώς ορισμένο το ζητούμενο όριο και γίνεται

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f^2(x) - f(x) + 1} - 1}{\ln(f(x))^{f(x)} + 2f(x)} & \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{u^2 - u + 1} - 1}{u \cdot \ln u + 2u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{u^2 \left(1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right)} - 1}{u \cdot (\ln u + 2)} \stackrel{u>0}{=} \\ & = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}} - \frac{1}{u}\right)}{u \cdot (\ln u + 2)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln u + 2} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}} - \frac{1}{u}\right) \right) = 0 \cdot (1 - 0) = 0. \end{aligned}$$

ii. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, οπότε είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 + (+\infty) = +\infty$. Επομένως είναι καλώς ορισμένο το ζητούμενο όριο και

$$\text{ισούται με } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3^{f(x)} \cdot \eta\mu 3^{-f(x)}\right) \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(3^u \cdot \eta\mu 3^{-u}\right) \stackrel{t=3^{-u}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} \cdot \eta\mu t\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta\mu t}{t} = 1$$

Δ4.i. Είναι $x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{\ln^2 x}$, οπότε η ανίσωση

$$x^{\ln x} + \ln^4 x > e + \ln^2 x \Leftrightarrow e^{\ln^2 x} + \ln^4 x - \ln^2 x > e \Leftrightarrow f(\ln^2 x) > f(1) \quad (3).$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^x + 2 > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως, για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$

είναι $\ln^2 x \geq 0$, άρα η (3) $\Leftrightarrow \ln^2 x > 1 \Leftrightarrow \ln x < -1$, ή $\ln x > 1 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-1}$, ή $x > e$.

ii. Έστω $h(x) = (x - \beta) \cdot f(x) + (x - \alpha) \cdot f(x) - 2(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $\alpha \neq \beta$. Έστω ότι $\alpha < \beta$. Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο σύνολο $[\alpha, \beta]$. Επίσης ισχύουν: $h(\alpha) = (\alpha - \beta) \cdot f(\alpha)$ και $h(\beta) = (\beta - \alpha) \cdot f(\beta)$, άρα $h(\alpha) \cdot h(\beta) = -(\alpha - \beta)^2 \cdot f(\alpha) \cdot f(\beta)$ (3)

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$, άρα κάθε $x \geq 0$

είναι $f(x) \geq f(0) = 1 > 0$. Για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, άρα για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 1 > 0$.

Άρα είναι $f(x) \geq 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f(\alpha) > 0$, $f(\beta) > 0$. Τότε, από τη σχέση (3) προκύπτει ότι $h(\alpha) \cdot h(\beta) < 0$. Επομένως, από το θεώρημα του Bolzano,

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} + \frac{f(\xi)}{\xi - \beta} = 2$

Ομοίως, αν $\alpha > \beta$.

03 Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι

$$\begin{aligned} f^3(x) + e^{f(x)} + \varepsilon \varphi x &= \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu \nu^3 x} + e^{\varepsilon \varphi x} \Leftrightarrow f^3(x) + e^{f(x)} = \varepsilon \varphi x \cdot \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} - \varepsilon \varphi x + e^{\varepsilon \varphi x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f^3(x) + e^{f(x)} &= \varepsilon \varphi x \cdot \left(\frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} - 1 \right) + e^{\varepsilon \varphi x} \Leftrightarrow f^3(x) + e^{f(x)} = \varepsilon \varphi x \cdot (1 + \varepsilon \varphi^2 x - 1) + e^{\varepsilon \varphi x} \\ \Leftrightarrow f^3(x) + e^{f(x)} &= \varepsilon \varphi^3 x + e^{\varepsilon \varphi x} \quad (1). \end{aligned}$$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^3 + e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $g'(x) = 3x^2 + e^x > 0$. Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα, επομένως είναι και 1-1. Τότε η σχέση (1) γίνεται

$$g(f(x)) = g(\varepsilon \varphi x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) = \varepsilon \varphi x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Δ2.i. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^2(x)}{f(x) + x \cdot f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\varepsilon \varphi^2 x}{\varepsilon \varphi x + \frac{x}{\sin^2 x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\varepsilon \varphi^2 x}{\varepsilon \varphi x + x(1 + \varepsilon \varphi^2 x)} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\varepsilon \varphi x}{x} \cdot \frac{\varepsilon \varphi x}{\frac{\varepsilon \varphi x}{x} + 1 + \varepsilon \varphi^2 x} \right) = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \varphi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sin x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

ii. Έστω τυχαία $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ με $\alpha < \beta$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο των τιμών της στο διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ είναι το $f(\Delta) = [f(\alpha), f(\beta)]$

$$\text{Είναι } \alpha < \beta < 0 \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) < f(0) \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) < 0$$

$$\begin{aligned} \text{Έστω } f(\alpha) < -\sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)} < f(\beta) &\Leftrightarrow -f(\alpha) > \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)} > -f(\beta) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f^2(\alpha) > f(\alpha) \cdot f(\beta) > f^2(\beta) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (f(\alpha) \cdot (f(\alpha) - f(\beta))) > 0 \text{ και } f(\beta) \cdot (f(\alpha) - f(\beta)) > 0 &\text{ οι οποίες ισχύουν.} \end{aligned}$$

Άρα $-\sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)} = -\sqrt{\varepsilon \varphi \alpha \cdot \varepsilon \varphi \beta} \in f(\Delta)$. Επομένως, εφόσον η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = -\sqrt{\varepsilon \varphi \alpha \cdot \varepsilon \varphi \beta} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi x_0 = -\sqrt{\varepsilon \varphi \alpha \cdot \varepsilon \varphi \beta}$

Δ3. Είναι $\varepsilon \varphi \omega = f'(\alpha) = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. Όταν η τετμημένη του σημείου A μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε και η γωνία ω μεταβάλλεται με το χρόνο, οπότε

$$\begin{aligned} \varepsilon \varphi \omega(t) = \frac{1}{\sin^2 \alpha(t)} &\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \omega(t)} \cdot \omega'(t) = \frac{2 \sin \alpha(t) \cdot \eta \mu \alpha(t)}{\sin^4 \alpha(t)} \cdot \alpha'(t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1 + \varepsilon \varphi^2 \omega(t)) \cdot \omega'(t) &= \frac{2 \eta \mu \alpha(t)}{\sin^3 \alpha(t)} \cdot \alpha'(t). \end{aligned}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που το υλικό σημείο διέρχεται από το σημείο της C_f με

τετμημένη $\frac{\pi}{4}$ είναι $\varepsilon \varphi \omega(t_0) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} = 1 + \varepsilon \varphi^2 \frac{\pi}{4} = 2$.

$$\text{Τότε } (1 + \varepsilon \varphi^2 \alpha(t_0)) \cdot \omega'(t_0) = \frac{2\varepsilon \varphi \alpha(t_0)}{\sin^2 \alpha(t_0)} \cdot \alpha'(t_0) \Leftrightarrow 5 \cdot \omega'(t_0) = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \alpha'(t_0) \Leftrightarrow$$

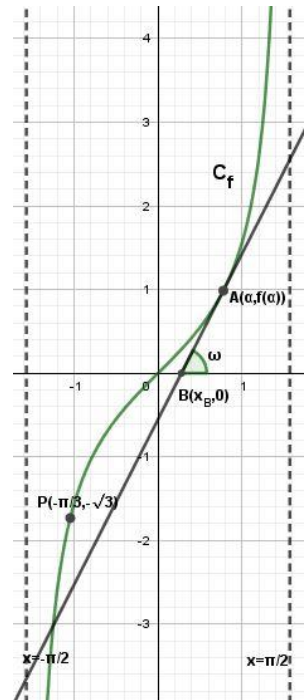
$$\Leftrightarrow \omega'(t_0) = \frac{4}{5} \cdot \alpha'(t_0) < \alpha'(t_0) \Rightarrow \omega'(t_0) < \alpha'(t_0)$$

Δ4. Η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο της $A(\alpha, f(\alpha))$ είναι $(\varepsilon): y - f(\alpha) = f'(\alpha) \cdot (x - \alpha)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(x_B, 0)$, αν και μόνο αν ισχύει

$$-f(\alpha) = f'(\alpha) \cdot (x_B - \alpha) \Leftrightarrow -\varepsilon \varphi \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot (x_B - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\eta \mu \alpha \cdot \sigma \nu \alpha = x_B - \alpha \Leftrightarrow x_B = \alpha - \eta \mu \alpha \cdot \sigma \nu \alpha .$$

Όταν η τετμημένη του σημείου A μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε και η τετμημένη x_B , του σημείου $B(x_B, 0)$ μεταβάλλεται με το χρόνο t , οπότε είναι



$$x_B(t) = \alpha(t) - \eta \mu \alpha(t) \cdot \sigma \nu \alpha(t) \Rightarrow x_B'(t) = \alpha'(t) - (\sin^2 \alpha(t) - \eta \mu^2 \alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$$

$$\Leftrightarrow x_B'(t) = (1 - \sin^2 \alpha(t) + \eta \mu^2 \alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \Leftrightarrow x_B'(t) = 2\eta \mu^2 \alpha(t) \cdot \alpha'(t)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου $A(\alpha, f(\alpha))$ ισούται με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου $B(x_B, 0)$

$$\text{είναι } x_B'(t_0) = 2\eta \mu^2 \alpha(t_0) \cdot \alpha'(t_0) \stackrel{x_B(t_0) = \alpha'(t_0) \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 = 2\eta \mu^2 \alpha(t_0) \Leftrightarrow \eta \mu^2 \alpha(t_0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\eta \mu \alpha(t_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ή } \eta \mu \alpha(t_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{\alpha(t_0) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow \alpha(t_1) = -\frac{\pi}{4}, \text{ ή } \alpha(t_2) = \frac{\pi}{4} . \text{ Άρα}$$

τα σημεία της C_f , στα οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης τους ισούται με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου $B(x_B, 0)$ είναι τα $A_1\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$

και $A_2\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.