ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 02
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΑΪΟΣ 2020

ΛΥΣΕΙΣ

Α ΘΕΜΑ

Α1. Αρκεί να αποδείξουμε οτι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$
Πράγματι,
- αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1).

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1) είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται οτι $f(x_1) = f(x_2)$.
Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις ισχύει οτι $f(x_1) = f(x_2)$.
Άρα η f είναι σταθερή σε όλο το Δ.

Α2. Σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$, λέγεται το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in \mathrm{A}$, είναι δηλαδή το σύνολο $f(\mathrm{A}) = \{ y / y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in \mathrm{A} \}$.

Α3. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.
(Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε αν $m = f(x_1)$ και $\mathrm{M} = f(x_2)$, να ισχύει $m \le f(x) \le \mathrm{M}$)

Α4. **α.** (Α)
β. Η ευθεία $(\varepsilon): y = 1$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$ στο σημείο της $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, αλλά και σε κάθε σημείο της C_f με συντεταγμένες $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},1\right),\ k\in\mathbb{Z}$.

Α5. **α.** Λ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Σ

Β ΘΕΜΑ

Β1. Για κάθε $x\in A$, $f'(x)=\varepsilon\varphi^2 x=\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1=(\varepsilon\varphi x-x)'$

$\Leftrightarrow$ υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε για κάθε $x\in A$, $f(x)=\varepsilon\varphi x-x+c$.

Για $x=0$ προκύπτει $c=1$. Άρα $f(x)=\varepsilon\varphi x-x+1,\ x\in A$

Β2. Η εξίσωση $f'(x)=\lambda_{(\varepsilon)}=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi^2 x=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=-1$, ή $\varepsilon\varphi x=1\overset{x\in A}{\Leftrightarrow}x=-\frac{\pi}{4}$, ή $x=\frac{\pi}{4}$. Άρα παράλληλες στην ευθεία $(\varepsilon): y=x$, είναι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f, στα σημεία της $\left(-\frac{\pi}{4}, f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ και $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Είναι $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1+\frac{\pi}{4}+1=\frac{\pi}{4}$ και $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{4}+1=2-\frac{\pi}{4}$

Επομένως, η εφαπτομένη (ε_1) της C_f στο σημείο της $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ έχει εξίσωση $(\varepsilon_1): y-\frac{\pi}{4}=x+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow(\varepsilon_1): y=x+\frac{\pi}{2}$ και η εφαπτομένη (ε_2) της C_f στο σημείο της $\left(\frac{\pi}{4},2-\frac{\pi}{4}\right)$ έχει εξίσωση $(\varepsilon_2): y-2+\frac{\pi}{4}=x-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow(\varepsilon_2): y=x+2-\frac{\pi}{2}$

Β3. Είναι $f'(x)=\varepsilon\varphi^2 x>0$, για κάθε $x\in A=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, άρα η συνάρτηση f είναι και συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Έστω $\mathrm{A}_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Τότε η f είναι και συνεχής και γνησίως αύξουσα και στο A_1

Είναι $f(0)=1$ και $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot \eta\mu x - x + 1\right) = (+\infty)\cdot(-1)+\frac{\pi}{2}+1=-\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \sigma\upsilon\nu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x > 0$, για $x > -\frac{\pi}{2}$, κοντά στο $-\frac{\pi}{2}$, επομένως $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$.

Άρα $f(\mathrm{A}_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x), f(0)\right] = (-\infty, 1]$.

Το $0 \in f(\mathrm{A}_1)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, επομένως υπάρχει μοναδικό στο A $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα άρα για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, x_0\right) \Rightarrow$ $f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$. Και $x - x_0 < 0$, οπότε για $x < x_0$, κοντά στο x_0 είναι $\eta\mu(x-x_0) < 0$ άρα $f(x)\cdot\eta\mu(x-x_0) > 0$.

Επίσης, για κάθε $x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$. Και $x - x_0 > 0$, οπότε για $x > x_0$, κοντά στο x_0 είναι $\eta\mu(x-x_0) > 0$, άρα $f(x)\cdot\eta\mu(x-x_0) > 0$. Επομένως για κάθε $x \neq x_0$, κοντά στο x_0, είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\eta\mu(x-x_0)\right] = 0$ και $f(x)\cdot\eta\mu(x-x_0) > 0$. Άρα το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)\cdot\eta\mu(x-x_0)} = +\infty$

Β4. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι και $1-1$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφή της, στο $f(\mathrm{A})$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\eta\mu x - x + 1\right) = (+\infty)\cdot 1 - \frac{\pi}{2} + 1 = +\infty$

Άρα $D_{f^{-1}} = f(\mathrm{A}) = \left(\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x), \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Επομένως, η ανίσωση ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ και γράφεται ισοδύναμα :

$$4 \cdot f^{-1}\left(\left(x^2 - x - 2\right) \cdot \left(e^x - 1\right) + \frac{\pi}{4} \right) + \pi < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(\left(x^2 - x - 2\right) \cdot \left(e^x - 1\right) + \frac{\pi}{4} \right) < -\frac{\pi}{4} \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \left(x^2 - x - 2\right) \cdot \left(e^x - 1\right) + \frac{\pi}{4} < f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x - 2\right) \cdot \left(e^x - 1\right) + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left(x^2 - x - 2\right) \cdot \left(e^x - 1\right) < 0 \quad (1).$$

Ο πίνακας των προσήμων των παραγόντων, αλλά και του γινομένου είναι :

x	$-\infty$	-1		0		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$e^x - 1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Γ	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα η δοσμένη ανίσωση και ισοδύναμα το γινόμενο (1) γίνεται αρνητικό, για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$.

Γ ΘΕΜΑ

Γ1. Από τη σχέση (2) , για $x = 0$, προκύπτει $f(2) + f(1) = 0 \Leftrightarrow f(2) = -f(1)$ οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση $(1) \Rightarrow -f^2(1) \geq 0 \Leftrightarrow f^2(1) \leq 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$, άρα $f(2) = f(1) = 0$. Επομένως δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών για τη συνάρτηση f , στο διάστημα $[1, 2]$

Γ2.i. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, άρα παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της (2) προκύπτει : $2x \cdot f'\left(x^2 + 2\right) + 2 \cdot f'(2x + 1) = 4x^3 + 10x - 2 \quad (3)$.

Από τη σχέση (3) , για $x = 0$, προκύπτει $2 \cdot 0 \cdot f'(2) + 2 \cdot f'(1) = -2 \Leftrightarrow f'(1) = -1$ και για $x = 1$ προκύπτει $2 \cdot f'(3) + 2 \cdot f'(3) = 12 \Leftrightarrow 4 \cdot f'(3) = 12 \Leftrightarrow f'(3) = 3$.

α΄τρόπος. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[1,3]$. Είναι $f'(1)\cdot f'(3)=-3<0$. Άρα, από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(1,3)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$

β΄τρόπος. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και ισχύει $f(1)=f(2)=0$. Άρα, από το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $x_0\in(1,2)\subseteq(1,3)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$

ii. Η συνάρτηση f' είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[1,x_0]$ και $[x_0,3]$, και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα $(1,x_0)$ και $(x_0,3)$. Τότε, από το θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχουν $\xi_1\in(1,x_0)$ και $\xi_2\in(x_0,3)$, τέτοια ώστε $f''(\xi_1)=\dfrac{f'(x_0)-f'(1)}{x_0-1}=\dfrac{0-(-1)}{x_0-1}=\dfrac{1}{x_0-1}$ και $f''(\xi_2)=\dfrac{f'(3)-f'(x_0)}{3-x_0}=\dfrac{3}{3-x_0}$.

Άρα $\dfrac{1}{f''(\xi_1)}+\dfrac{3}{f''(\xi_2)}=x_0-1+3-x_0=2$

Γ3. Έστω οτι η πολυωνυμική συνάρτηση f είναι ν-οστού βαθμού. Τότε η $f(x^2+2)$ είναι 2ν βαθμού, και η $f(2x+1)$ είναι ν-οστού βαθμού , άρα η άρα $f(x^2+2)+f(2x+1)$ είναι 2ν βαθμού. Το 2^{ο} μέλος της (2) είναι πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού , άρα από τη σχέση (2) προκύπτει οτι $2\nu=4\Leftrightarrow\nu=2$.

Επίσης $f(1)=f(2)=0$, άρα $f(x)=\alpha\cdot(x-1)\cdot(x-2),\alpha\neq0$. Επομένως είναι $f(x^2+2)=\alpha\cdot(x^2+1)\cdot x^2=\alpha\cdot x^4+\alpha\cdot x^2$, $\quad f(2x+1)=2\alpha x\cdot(2x-1)=4\alpha x^2-2\alpha x$, οπότε $f(x^2+2)+f(2x+1)=\alpha\cdot x^4+5\alpha x^2-2\alpha x$.

Επομένως, λόγω της (2) , ισχύουν: $(\alpha=1 \text{ και } 5\alpha=5 \text{ και } -2\alpha=-2)\Leftrightarrow\alpha=1$

Άρα $f(x)=(x-1)\cdot(x-2)=x^2-3x+2,\ x\in\mathbb{R}$

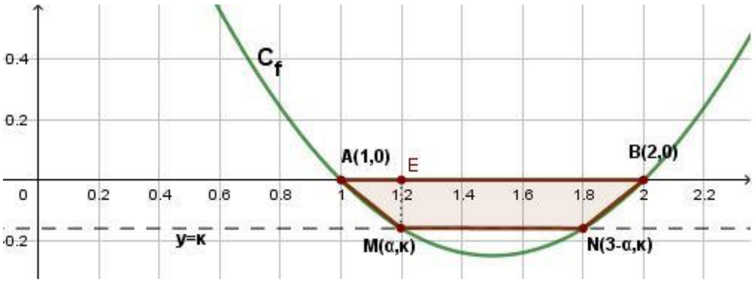
Γ4.i. Η ευθεία $y=\kappa$, με $-\dfrac{1}{4}<\kappa<0$,τέμνει τη C_f σε σημεία που οι τετμημένες τους είναι οι λύσεις (αν υπάρχουν) της εξίσωσης $f(x)=\kappa\Leftrightarrow x^2-3x+2-\kappa=0$

Είναι $\Delta=9-4\cdot(2-\kappa)=1+4\cdot\kappa>0$, άρα η ευθεία $y=\kappa$, με $-\dfrac{1}{4}<\kappa<0$,τέμνει τη

C_f σε σημεία με τετμημένες x_1, x_2 , για τις οποίες ισχύουν $x_1 = \alpha$ και $x_1 + x_2 = 3 \Leftrightarrow \alpha + x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = 3 - \alpha$.

Το σημείο $M(\alpha, \kappa) \in C_f$, άρα είναι $f(\alpha) = \kappa$.

Άρα το σημείο $N(x_2, \kappa)$ έχει συντεταγμένες $N(3-\alpha, f(\alpha))$



ii. Είναι $A(1,0)$ και $B(2,0)$ επομένως η μεγάλη βάση του τραπεζίου $ABNM$ έχει μήκος $AB = 2 - 1 = 1$.

Η μικρή του βάση MN έχει μήκος $MN = |3 - \alpha - \alpha| = 3 - 2\alpha$, εφόσον είναι $1 < \alpha < \frac{3}{2} \Rightarrow 3 - 2\alpha > 0$.

Το ύψος του τραπεζίου ισούται με $|f(\alpha)| = |(\alpha - 1)\cdot(\alpha - 2)| = (\alpha - 1)\cdot(2 - \alpha)$.

Τότε το εμβαδόν του τραπεζίου $ABNM$, σαν συνάρτηση του α , δίνεται από τον τύπο $E(\alpha) = \dfrac{(1 + 3 - 2\alpha)\cdot(\alpha - 1)\cdot(2 - \alpha)}{2} = (\alpha - 1)\cdot(2 - \alpha)^2,\ 1 < \alpha < 2$.

Επομένως, είναι

$$E'(\alpha) = (2 - \alpha)^2 - 2(\alpha - 1)\cdot(2 - \alpha) = (2 - \alpha)\cdot(4 - 3\alpha) = -3(2 - \alpha)\cdot\left(\alpha - \frac{4}{3}\right),\ 1 < \alpha < 2$$

Ο πίνακας προσήμων της $E'(\alpha)$ και των μεταβολών της μονοτονίας της συνάρτησης E είναι:

α	1	$\frac{4}{3}$	2
$E'(\alpha)$	$+$	0	$-$
E	$\nearrow$	ο.μ	$\searrow$

Επομένως, η συνάρτηση E είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(1, \frac{4}{3}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{4}{3}, 2\right)$ και παρουσιάζει μέγιστο, για $\alpha = \frac{4}{3}$, το $E\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$ τ.μ.

<u>Δ ΘΕΜΑ</u>

Δ1. Για κάθε $x \geq 0$, το $f(x) > 0$ και η σχέση $\ln^2 f(x) + 2\sqrt{x} = \ln\left(f(x)\right)^2 + x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln^2 f(x) - 2 \cdot \ln f(x) + 1 = x - 2\sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow \left(\ln f(x) - 1\right)^2 = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g^2(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 \quad (1)$, όπου $g(x) = \ln f(x) - 1,\ x \geq 0$.

Είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow g^2(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$, άρα $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$

Επιπλέον, η συνάρτηση g είναι και συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $[0,1)$ και $(1,+\infty)$.

- Είναι $g(0) = \ln f(0) - 1 = \ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1$, άρα $g(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,1)$
- και $g(4) = \ln f(4) - 1 = \ln e^2 - 1 = 2 - 1 = 1$, άρα $g(x) > 0$, για κάθε $x \in (1,+\infty)$

Τότε από τη σχέση (1) προκύπτουν :

Για κάθε $x \in [0,1)$, $|g(x)| = \left|\sqrt{x} - 1\right| \Leftrightarrow -g(x) = -\left(\sqrt{x} - 1\right) \Leftrightarrow \ln f(x) - 1 = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln f(x) = \sqrt{x} \Leftrightarrow f(x) = e^{\sqrt{x}}$

και για κάθε $x \in (1,+\infty)$, $|g(x)| = \left|\sqrt{x} - 1\right| \Leftrightarrow g(x) = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow \ln f(x) - 1 = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln f(x) = \sqrt{x} \Leftrightarrow f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

Επίσης η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα το $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} e^{\sqrt{x}} = e$.

Άρα τελικά ισχύει οτι $f(x) = e^{\sqrt{x}},\ x \in [0,+\infty)$

Δ2.i. Το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}} \overset{w=\sqrt{x}}{=} \lim\limits_{w \to +\infty} e^w = +\infty$. Άρα το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x} - \ln\left(1 + f(x)\right)\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\ln f(x) - \ln\left(1 + f(x)\right)\right) = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{f(x)}{1 + f(x)} =$$

$$\overset{u=f(x)}{=} \lim_{u \to +\infty} \ln \frac{u}{1+u} \overset{\frac{u}{1+u}=t}{=} \lim_{t \to 1} \ln t = \ln 1 = 0$$, εφόσον $\lim\limits_{u \to +\infty} t = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{u}{1+u} = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{u}{u} = \lim\limits_{u \to +\infty} 1 = 1$

και

ii. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}\overset{u=e^{\sqrt{x}}=f(x)}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{2u+\frac{1}{u}}{u-\frac{1}{u}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2u^2+1}{u^2-1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2u^2}{u^2}=\lim_{u\to+\infty}2=2$$

Δ3. Για κάθε $x>0$, είναι $f'(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και $1-1$.

Επομένως ορίζεται η αντίστροφή της, στο

$D_{f^{-1}}=f\left([0,+\infty)\right)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$.

Έστω $f(x)=y\geq1\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$.

Τότε $e^{\sqrt{x}}=y\Leftrightarrow\sqrt{x}=\ln y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x=\ln^2y,\ y\geq1$, άρα $f^{-1}(x)=\ln^2x,\ x\geq1$.

Ζητείται να αποδειχτεί οτι ισχύει $\ln^2(x+1)\leq x$ *, για κάθε* $x\geq0$

α΄τρόπος Έστω η συνάρτηση $h(x)=\ln(x+1)-\sqrt{x},\ x\geq0$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής.

Για κάθε $x>0$, είναι $h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-x-1}{2\sqrt{x}\cdot(x+1)}=-\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2\sqrt{x}\cdot(x+1)}\leq0$,

με $h'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, μόνο. Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως, για κάθε $x\geq0\Leftrightarrow h(x)\leq h(0)\Leftrightarrow\ln(x+1)\leq\sqrt{x}\overset{\ln(x+1)\geq0}{\Leftrightarrow}\ln^2(x+1)\leq x$

β΄τρόπος Για κάθε $x\geq0$, η σχέση που ζητείται να αποδειχτεί, γίνεται

$\ln^2(x+1)\leq x\Leftrightarrow f^{-1}(x+1)\leq x\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x+1)\right)\leq f(x)\Leftrightarrow x+1\leq e^{\sqrt{x}}\ \ (2)$.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=(x+1)\cdot e^{-\sqrt{x}},\ x\geq0$. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής.

Για κάθε $x>0$, $\varphi'(x)=e^{-\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x+1)\cdot e^{-\sqrt{x}}=-\frac{x+1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}}=-\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}}\leq0$,

με $\varphi'(x)=0\Leftrightarrow x=1$. Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα.

Τότε για κάθε $x \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(0) \Leftrightarrow (x+1)\cdot e^{-\sqrt{x}} \leq 1 \Leftrightarrow x+1 \leq e^{\sqrt{x}}$, δηλαδή ισχύει η σχέση (2), άρα ισχύει και η ισοδύναμή της $\ln^2(x+1) \leq x$.

Δ4. Για κάθε $x > 1$, είναι $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{2\cdot \ln x}{x}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο $\mathrm{M}\left(\alpha, f^{-1}(\alpha)\right)$, με $\alpha > 1$, είναι $(\varepsilon): y - f^{-1}(\alpha) = \left(f^{-1}\right)'(\alpha)\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - \ln^2\alpha = \dfrac{2\cdot\ln\alpha}{\alpha}\cdot(x-\alpha)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(x_{\mathrm{B}}, 0)$, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση :

$$-\ln^2\alpha = \frac{2\cdot\ln\alpha}{\alpha}\cdot(x_{\mathrm{B}}-\alpha) \overset{\ln\alpha>0}{\Leftrightarrow} -\ln\alpha = \frac{2}{\alpha}\cdot(x_{\mathrm{B}}-\alpha) \Leftrightarrow x_{\mathrm{B}} = \frac{\alpha\cdot(2-\ln\alpha)}{2}.$$

Όταν η τετμημένη του σημείου M μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε και η τετμημένη x_{B}, του σημείου $(x_{\mathrm{B}}, 0)$ μεταβάλλεται με το χρόνο, οπότε η τελευταία σχέση γίνεται

$$x_{\mathrm{B}}(t) = \frac{1}{2}\cdot\alpha(t)\cdot\left(2-\ln\alpha(t)\right) \Rightarrow x'_{\mathrm{B}}(t) = \frac{1}{2}\cdot\alpha'(t)\cdot\left(2-\ln\alpha(t)\right) - \frac{1}{2}\cdot\alpha(t)\cdot\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x'_{\mathrm{B}}(t) = \frac{1}{2}\cdot\alpha'(t)\cdot\left(1-\ln\alpha(t)\right).$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_0 που το υλικό σημείο M διέρχεται από το σημείο με τετμημένη $\sqrt{e}$ μ, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x_{B} ισούται με

$$x'_{\mathrm{B}}(t_0) = \frac{1}{2}\cdot\alpha'(t_0)\cdot\left(1-\ln\alpha(t_0)\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ \mu/s$$

ΕΙΣΗΓΗΣΗ-ΛΥΣΕΙΣ-ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Ν. ΨΑΘΑ