

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 02
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΑΪΟΣ 2020

A ΘΕΜΑ

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το Δ . **7 μ.**

A2. Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$; **3 μ.**

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής. **3 μ.**

A4. Έστω ο ισχυρισμός:

« Μια εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f , μπορεί να έχει άπειρα κοινά σημεία με τη C_f »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή (**A**), ή ψευδή (**Ψ**)

β. Να δώσετε ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης, που να επιβεβαιώνει την απάντησή σας. **1+3 μ.**

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστή**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και f είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

β. Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = m$ και ισχύει $f(x) < g(x)$, κοντά στο x_0 , τότε είναι πάντα $l \leq m$

γ. Κάθε συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο, σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

δ. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f έχει δυο ρίζες, τότε η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$

2x4 μ.

B ΘΕΜΑ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$ και

$$f'(x) = \varepsilon \varphi^2 x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = \varepsilon \varphi x - x + 1$, $x \in A$ **6 μ.**

B2. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες στην ευθεία $(\varepsilon): y = x$ **6 μ.**

B3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) \cdot \eta\mu(x - x_0)}$ **7 μ.**

B4. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και να λύσετε την ανίσωση

$$4 \cdot f^{-1} \left(\left(x^2 - x - 2 \right) \cdot \left(e^x - 1 \right) + \frac{\pi}{4} \right) + \pi < 0$$
 6 μ.

Γ ΘΕΜΑ

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη, με $f(1) \cdot f(2) \geq 0$ (1)
και $f(x^2 + 2) + f(2x + 1) = x^4 + 5x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (2)

Γ1. Να δείξετε ότι δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών για τη συνάρτηση f , στο διάστημα $[1, 2]$ **3 μ.**

Γ2.i. Να βρείτε τα $f'(1)$ και $f'(3)$. Στη συνέχεια, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$, τέτοια ώστε $\frac{1}{f''(\xi_1)} + \frac{3}{f''(\xi_2)} = 2$
3+3 μ.

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική.

Γ3. Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ **5 μ.**

Γ4. Η ευθεία $y = \kappa$, με $-\frac{1}{4} < \kappa < 0$, τέμνει τη γραφική παράσταση της f στα σημεία M και N , με $M(\alpha, \kappa)$, όπου $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

i. Να δείξετε ότι $N(3 - \alpha, f(\alpha))$

ii. Αν $A(1, 0)$ και $B(2, 0)$, να δείξετε ότι το εμβαδόν του τραapeζίου $ABNM$ γίνεται μέγιστο, όταν $\alpha = \frac{4}{3}$ και να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν.

4+7 μ.

Δ ΘΕΜΑ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, με $f(0) = 1$ και $f(4) = e^2$, για την οποία ισχύει η σχέση $\ln^2 f(x) + 2\sqrt{x} = \ln(f(x))^2 + x$, για κάθε $x \geq 0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, $x \in [0, +\infty)$ **6 μ.**

Δ2. Να υπολογίσετε τα όρια **i.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \ln(1 + f(x)))$ και

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}$ **3+3 μ.**

Δ3. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης f και είναι $f^{-1}(x) = \ln^2 x$, $x \geq 1$. Στη συνέχεια, να δείξετε ότι ισχύει $\ln^2(x+1) \leq x$, για κάθε $x \geq 0$ **6 μ.**

Δ4. Ένα υλικό σημείο $M(\alpha, f^{-1}(\alpha))$, με $\alpha > 1$ κινείται επί της $C_{f^{-1}}$ και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2 \mu/s$. Αν η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της M , τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(x_B, 0)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x_B , τη χρονική στιγμή που το υλικό σημείο διέρχεται από το σημείο με τετμημένη \sqrt{e} μ **7 μ.**

Καλή επιτυχία

ΕΙΣΗΓΗΣΗ-ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Ν. ΨΑΘΑ