Λύσεις των θεμάτων του επαναληπτικού διαγωνίσματος 10-12-20 , Ν. ΨΑΘΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=$$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δλδ. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Α2. Μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει μέγιστο, στο $x_0\in\mathrm{A}$, όταν $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in\mathrm{A}$

Α3. **α).** Α

β). Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ΄αυτό, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$, ενώ

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

Α4. **α).** Λ **β).** Σ **γ).** Λ **δ).** Λ **ε).** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x \in \mathrm{A}$, η σχέση $\ln\left(e^{f(x)}+1\right)=f(x)+x$, γράφεται ισοδύναμα:

$e^{f(x)+x}=e^{f(x)}+1 \Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot e^{x}-e^{f(x)}=1 \Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot\left(e^{x}-1\right)=1 \Leftrightarrow e^{-f(x)}=e^{x}-1,\ e^{-f(x)}>0$

επομένως $e^{x}-1>0 \Leftrightarrow e^{x}>1 \Leftrightarrow x>0$.

Τότε $-f(x)=\ln\left(e^{x}-1\right) \Leftrightarrow f(x)=-\ln\left(e^{x}-1\right),\ x \in \mathrm{A}=(0,+\infty)$

Β2. Για κάθε $x>0$, είναι $f'(x)=-\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}<0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι και $1-1$.

Επομένως ορίζεται η αντίστροφή της, στο σύνολο $D_{f^{-1}}=f(\mathrm{A})$.

Είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^{+}}\left[-\ln\left(e^{x}-1\right)\right] \overset{u=e^{x}-1}{=} -\lim\limits_{u \to 0^{+}} \ln u=-(-\infty)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \overset{u=e^{x}-1}{=} -\lim\limits_{u \to +\infty} \ln u=-(+\infty)=-\infty$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής, επομένως το σύνολο τιμών της είναι $D_{f^{-1}}=f(\mathrm{A})=\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to 0} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Έστω $f(x)=y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x \in(0,+\infty)$. Τότε από τη σχέση (1) προκύπτει $\ln\left(e^{y}+1\right)=y+f^{-1}(y),\ y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\ln\left(e^{x}+1\right)-x,\ x \in \mathbb{R}$

Ή εναλλακτικά :

$f(x)=-\ln\left(e^{x}-1\right)=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}-1\right)=-y \Leftrightarrow e^{x}-1=e^{-y} \Leftrightarrow e^{x}=1+e^{-y} \Leftrightarrow x=\ln\left(1+e^{-y}\right),$

άρα $f^{-1}(y)=\ln\left(1+e^{-y}\right),\ y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right),\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{e^{x}}\right)=\ln \dfrac{e^{x}+1}{e^{x}}=\ln\left(e^{x}+1\right)-x,\ x \in \mathbb{R}$

Β3. Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, η ανίσωση $f(\text{ημ}x) + \ln\left(\sqrt{e} - 1\right) < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(\text{ημ}x) < -\ln\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) \Leftrightarrow f(\text{ημ}x) < f\left(\frac{1}{2}\right) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} \text{ημ}x > \frac{1}{2} = \text{ημ}\frac{\pi}{6} \overset{\text{ημ}x\uparrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Β4. Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(e^x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\ln 2, 0)$.

Είναι $f'(\ln 2) = -2$, άρα η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση :

$(\varepsilon): y - f(\ln 2) = f'(\ln 2)\cdot(x - \ln 2) \Leftrightarrow (\varepsilon): y = -2x + 2\cdot\ln 2$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f^{-1}(x) - (-2x + 2\cdot\ln 2) = \ln\left(1 + e^x\right) + x - 2\cdot\ln 2,\ x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής, άρα είναι συνεχής και στο διάστημα $[0,1]$.

Είναι $g(0) = -\ln 2 < 0$, $g(1) = \ln(e+1) + 1 - 2\cdot\ln 2 > \ln e + 1 - 2\cdot\ln 2 = 2\cdot(1 - \ln 2) > 0$

Άρα $g(0)\cdot g(1) < 0$. Τότε, από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x_0) = -2x_0 + 2\cdot\ln 2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η σχέση $f^2(x) + \text{συν}^2 x + 2\alpha\cdot x\cdot\text{ημ}x = 1 + \alpha^2\cdot x^2 \Leftrightarrow$

$$f^2(x) = \alpha^2\cdot x^2 - 2\alpha\cdot x\cdot\text{ημ}x + \text{ημ}^2 x \Leftrightarrow f^2(x) = (\alpha\cdot x - \text{ημ}x)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |\alpha\cdot x - \text{ημ}x|$$

Είναι $f:\mathbb{R} \to [0, +\infty)$, άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι , $f(x) = |\alpha\cdot x - \text{ημ}x| \geq 0$ με $f(0) = 0$. Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επομένως, από το θεώρημα του Fermat, είναι $f'(0) = 0$.

Είναι $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left|\dfrac{\alpha\cdot x - \text{ημ}x}{x}\right| = \lim\limits_{x\to 0^+}\left|\alpha - \dfrac{\text{ημ}x}{x}\right| = |\alpha - 1|$, επομένως

$|\alpha-1|=0 \Leftrightarrow \alpha=1$

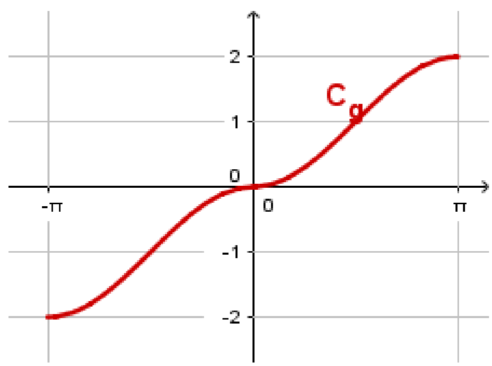
ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει οτι $|ημx|<|x| \Leftrightarrow -|x|<ημx<|x|$. Έτσι, για $x<0$ είναι $x<ημx$ και για $x>0$ είναι $x>ημx$. Επίσης, το $f(0)=0$. Επομένως , για $\alpha=1$ η συνάρτηση f γίνεται $f(x)=|x-ημx|=\begin{cases} ημx-x, & x<0 \\ x-ημx, & x\geq 0\end{cases}$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο

$$f'(x)=\begin{cases} συνx-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1-συνx, & x>0\end{cases}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $συνx\leq 1$. Έτσι, για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)\leq 0$, με την ισότητα μόνο σε μεμονωμένα σημεία , άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$. Ομοίως, για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)\geq 0$, με την ισότητα μόνο σε μεμονωμένα σημεία , άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f'(x),\ x\in[-\pi,\pi]$ προκύπτει με μετατόπιση της συνάρτησης $συνx$ κατά 1 μονάδα κατακόρυφα προς τα κάτω , για $x<0$ και της $-συνx$ κατά 1 μονάδα κατακόρυφα προς τα πάνω , για $x>0$



Γ3. Το σύνολο $\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)<0\}=\varnothing$.

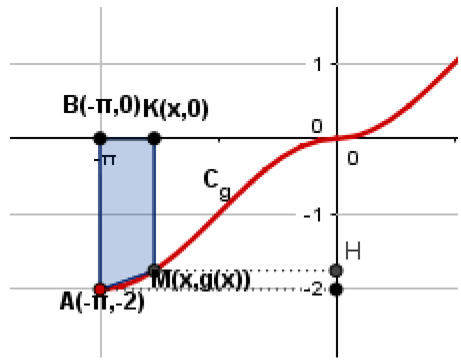
Αντίθετα, το σύνολο $\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\geq 0\}=\mathbb{R}$, άρα ορίζεται η $f'\circ f$ με τύπο,

$$(f'\circ f)(x)=f'(f(x))=1-συνf(x)=1-συν|x-ημx|=\begin{cases} 1-συν(ημx-x), & x<0 \\ 1-συν(x-ημx), & x\geq 0\end{cases}$$

Το ζητούμενο όριο ισούται με $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(f(x))}{f(x)} \overset{u=f(x)>0}{=} \lim\limits_{u\to 0^+}\frac{f'(u)}{u}=\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{1-\text{συν}u}{u}=0$

Γ4. Το σημείο $\mathrm{M}(x,g(x))$ ξεκινά από το σημείο $\mathrm{A}(-\pi,-2)$ και πλησιάζει προς το σημείο $\left(-\frac{\pi}{3},g\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, άρα είναι $-\pi<x<-\frac{\pi}{3}$.

Το τραπέζιο ABKM έχει μεγάλη βάση $\mathrm{AB}=2$ μον , μικρή βάση $\mathrm{KM}=|g(x)|=1-\text{συν}x$ και το ύψος του είναι $\mathrm{BK}=x-(-\pi)=x+\pi$



Άρα το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}=\frac{(\mathrm{AB}+\mathrm{KM})\cdot\mathrm{BK}}{2}=\frac{(3-\text{συν}x)\cdot(x+\pi)}{2}$

Όταν η τετμημένη του σημείου $\mathrm{M}(x,g(x))$ μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε και το εμβαδόν του τραπεζίου μεταβάλλεται με το χρόνο, άρα ο τύπος του εμβαδού γίνεται :

$$\mathrm{E}(t)=\frac{(3-\text{συν}x(t))\cdot(x(t)+\pi)}{2}\Rightarrow \mathrm{E}'(t)=\frac{1}{2}\left[\text{ημ}x(t)\cdot(x(t)+\pi)+3-\text{συν}x(t)\right]\cdot x'(t)$$

Έτσι, τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο M διέρχεται από το $\left(-\frac{\pi}{3},g\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ είναι

$$\mathrm{E}'(t_0)=\frac{1}{2}\cdot\left[\text{ημ}x(t_0)\cdot(x(t_0)+\pi)+3-\text{συν}x(t_0)\right]\cdot x'(t_0)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\right)+3-\text{συν}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot 2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}+3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}\quad \text{τ.μ./s.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και ισχύει $\left|f(x)\right|=\sqrt{x\cdot|x-4|},\ x\geq 0$.

Άρα $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$, ή $x=4$. Επομένως η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,4)$ και $(4,+\infty)$. Είναι $f(2)=2>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,4)$.

Για κάθε $x>2e$ ισχύει $f(x)+\ln x+\eta\mu x>\ln^2 x\Leftrightarrow f(x)>\ln^2 x-\ln x-\eta\mu x$ (1) Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln^2 x-\ln x-\eta\mu x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln^2 x\cdot\left(1-\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\eta\mu x\right)\right]=(+\infty)\cdot(1-0-0)=+\infty\ ,$$

εφόσον $\left|\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\eta\mu x\right|\leq\frac{1}{\ln^2 x}\Leftrightarrow-\frac{1}{\ln^2 x}\leq\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\eta\mu x\leq\frac{1}{\ln^2 x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\pm\frac{1}{\ln^2 x}\right)=0$, άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\eta\mu x\right)=0$. Επομένως, από τη σχέση (1) προκύπτει οτι και το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Τότε υπάρχει α αρκετά μεγάλο, ώστε $f(\alpha)>0$. Η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο $(4,+\infty)$, άρα είναι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(4,+\infty)$.

Τότε $f(x)=\sqrt{x\cdot|x-4|}=\begin{cases}\sqrt{-x\cdot(x-4)}=\sqrt{4x-x^2}, & x\in[0,4]\\ \sqrt{x\cdot(x-4)}=\sqrt{x^2-4x}, & x\in(4,+\infty)\end{cases}$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Επίσης είναι $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}, & x\in(0,4)\\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}, & x\in(4,+\infty)\end{cases}$.

Επομένως ο πίνακας προσήμων της $f'(x)$ και μονοτονίας της συνάρτησης f είναι:

x	0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
f	τ.ε	$\nearrow$	τ.μ	$\searrow$	τ.ε	$\nearrow$	

Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\mathrm{A}_1=[0,2]$ και $\mathrm{A}_3=(4,+\infty)$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\mathrm{A}_2=[2,4]$.

Παρουσιάζει τ.μέγιστο για $x=2$, το $f(2)=2$ και ολικό ελάχιστο για $x=0$ και $x=4$, το $f(0)=f(4)=0$.

Λόγω της μονοτονίας και της συνέχειας της συνάρτησης f , τα σύνολα τιμών της στα διαστήματα $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\mathrm{A}_3$ είναι αντίστοιχα: $f(\mathrm{A}_1)=[f(0),f(2)]=[0,2]$, $f(\mathrm{A}_2)=[f(4),f(2)]=[0,2]$ και $f(\mathrm{A}_3)=\left(\lim\limits_{x\to 4}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$, εφόσον $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-4x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Επομένως, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα $f([0,+\infty))=f(\mathrm{A}_1)\cup f(\mathrm{A}_2)\cup f(\mathrm{A}_3)=[0,+\infty)$

Δ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[0,2]$ και $[2,4]$. Είναι και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα $(0,2)$ και $(2,4)$.

Τότε , από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχουν $x_1\in(0,2)$ και $x_2\in(2,4)$, τέτοια ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}=\dfrac{2}{2}=1$ και $f'(x_2)=\dfrac{f(4)-f(2)}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$. Η εφαπτομένη (ε_1) της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(x_1,f(x_1))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=f'(x_1)=1$ και η εφαπτομένη (ε_2) της C_f στο σημείο της $\mathrm{B}(x_2,f(x_2))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=f'(x_2)=-1$. Είναι $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$, άρα $(\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2)$.

Δ4.i. Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, η σχέση $g(x)+g'(x)=2\cdot(1+\etaμx+\sigmaυνx)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x\cdot g(x)+e^x\cdot g'(x)=2\cdot e^x\cdot(1+\etaμx+\sigmaυνx)\Leftrightarrow\left(e^x\cdot g(x)\right)'=\left(2\cdot e^x\cdot(1+\etaμx)\right)'\Leftrightarrow$$

υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $e^x\cdot g(x)=2\cdot e^x\cdot(1+\text{ημ}x)+c\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x)=2\cdot e^x\cdot(1+\text{ημ}x)+c\cdot e^{-x}$, Η συνάρτηση g είναι συνεχής και $g(0)=2$, άρα και $\lim\limits_{x\to0}g(x)=2\Leftrightarrow 2+c=2\Leftrightarrow c=0$ και τότε $g(x)=2\cdot(1+\text{ημ}x),\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

ii. Το σύνολο $\left\{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]/\,g(x)\geq0\right\}=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\neq\varnothing$, άρα ορίζεται η συνάρτηση $f\circ g$, με τύπο

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{\left|4\cdot(1+\text{ημ}x)^2-4\cdot2\cdot(1+\text{ημ}x)\right|}=\sqrt{\left|4\cdot(1+\text{ημ}x)\cdot(-1+\text{ημ}x)\right|}=$$

$$=2\cdot\sqrt{\left|\text{ημ}^2x-1\right|}=2\cdot\sqrt{\text{συν}^2x}=2\cdot\left|\text{συν}x\right|\overset{\text{συν}x\geq0}{=}2\cdot\text{συν}x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $g'(x)=2\cdot\text{συν}x$.

Επίσης, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cdot\text{ημ}x}{x}=2$, άρα $g'(0)=2$ και

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=-2\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\text{ημ}x}{x-\frac{\pi}{2}}\overset{u=x-\frac{\pi}{2}}{=}-2\cdot\lim_{u\to0}\frac{1-\text{συν}u}{u}=-2\cdot0=0\text{ ,άρα } g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Επομένως είναι $g'(x)=2\cdot\text{συν}x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, άρα $f\circ g=g'$

Ν. ΨΑΘΑ