ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

3ωρο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

10-12-20

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **(7 μον.)**

Α2. Πότε μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει μέγιστο, στο $x_0\in\mathrm{A}$; **(3 μον)**

Α3.α) Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό ως αληθή , ή ψευδή :
Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι παραγωγίσιμες, αλλά είναι συνεχείς σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού τους

β). Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτ. α) **(2+3 μον)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστή, ή Λάθος

α). Αν είναι $0<\alpha<1$, τότε $\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=0$

β). Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε $\lim_{h\to0}f(x_0+h)=f(x_0)$

γ). Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ τότε υπάρχει το πολύ ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=\eta$

δ). Ισχύει ο τύπος $(\sigma\varphi x)'=\frac{1}{\eta\mu^2x}$, $x\in\mathbb{R}-\{x/\eta\mu x=0\}$

ε). Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει διάστημα $[\alpha,\beta]$. στο οποίο η f να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

(2x5 μον.)

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\ln\left(e^{f(x)}+1\right)=f(x)+x$, (1) για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

Β1. Να δείξετε οτι $f(x)=-\ln\left(e^{x}-1\right),\ x\in\mathrm{A}=(0,+\infty)$ **(4 μον)**

Β2. Να δείξετε οτι ορίζεται η αντίστροφη της f και είναι
$f^{-1}(x)=\ln\left(e^{x}+1\right)-x,\ x\in\mathbb{R}$ **(7 μον)**

Β3. Να λύσετε στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ την ανίσωση $f(\etaμx)+\ln\left(\sqrt{e}-1\right)<0$ **(6 μον)**

Β4. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f , στο σημείο τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ και να δείξετε οτι η εξίσωση $f^{-1}(x)=-2x+2\cdot\ln 2$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0,1)$ **(8 μον)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ και $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $f^{2}(x)+συν^{2}x+2\alpha\cdot x\cdot ημx=1+\alpha^{2}\cdot x^{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Γ1.i. Να δείξετε οτι $\alpha=1$ **(7 μον)**

ii. Να δείξετε οτι $f(x)=\begin{cases} ημx-x, & x<0\\ x-ημx, & x\geq 0\end{cases}$ **(4 μον)**

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f'(x),\ x\in[-\pi,\pi]$ **(5 μον)**

Γ3. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f'\circ f$ και να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(f(x))}{f(x)}$
(4 μον)

Γ4. Υλικό σημείο $\mathrm{M}(x,g(x))$ ξεκινάει από το σημείο $\mathrm{A}(-\pi,-2)$ και κινείται επί της C_g με την τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $x'(t)=2\ \mu/s$. Έστω $\mathrm{B}(-\pi,0)$

και K η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τραπεζίου ABKM τη χρονική στιγμή που το σημείο M διέρχεται από το $\left(-\frac{\pi}{3}, g\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ **(5 μον)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

- $|f(x)|=\sqrt{x\cdot|x-4|},\ x\geq 0$ • $f(2)=2$ και • $f(x)+\ln x+\eta\mu x>\ln^2 x$ για κάθε $x>2e$
- $g(x)+g'(x)=2\cdot(1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και • $g(0)=2$

Δ1. Να δείξετε οτι $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4x-x^2}, & 0\leq x\leq 4\\ \sqrt{x^2-4x}, & x>4\end{cases}$ **(6 μον)**

Δ2. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(6 μον)**

Δ3. Να δείξετε οτι υπάρχουν σημεία $\mathrm{A}(x_1, f(x_1))$ και $\mathrm{B}(x_2, f(x_2))$, με $x_1, x_2\in(0,4)$, στα οποία οι αντίστοιχες εφαπτόμενες της C_f είναι μεταξύ τους κάθετες. **(5 μον)**

Δ4.i. Να δείξετε οτι $g(x)=2\cdot(1+\eta\mu x),\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ **(5 μον)**

ii. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$ και να δείξετε οτι $f\circ g=g'$ **(3 μον)**

<u>Καλή επιτυχία και καλές γιορτές!</u>
<u>Ν. ΨΑΘΑ , μαθηματικός</u>