Διαγώνισμα 10ο

Α ΘΕΜΑ

Α1. Να αποδείξετε το θεώρημα : « Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β) » **(7 μον)**

Α2. Να διατυπώσετε το 2ο θεώρημα (κανόνα) De L' Hospital **(4 μον)**

Α3. Θεωρείστε τον ισχυρισμό : *« Αν υπάρχουν τα* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *και* $f(x)<g(x)$ *, κοντά στο* x_0 *, τότε κατ΄ανάγκη ισχύει* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *»*

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Αληθή **(Α)** , ή Ψευδή **(Ψ)**

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.** **(1+3 μον)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή **(Σ)** , ή Λάθος **(Ψ)**

α. Αν ένα σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο $\mathrm{M}'(\beta,\alpha)\in \mathrm{C}_{f^{-1}}$

β. Μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

γ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$

δ. Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(\alpha)\neq f(\beta)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$

ε. Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει : $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$. **(5x2 μον)**

Β ΘΕΜΑ

Έστω συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισχύει οτι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2x+2}{x-2}=1$

Β1. Να δείξετε οτι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. **(6 μον)**

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $(2,2)$.

(7 μον)

Β3. Να δείξετε οτι ορίζεται η αντίστροφη της f και να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(f\left(x^2+x\right)-2\right)>0$ **(6 μον)**

Β4. Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε οτι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,2)$ τέτοια ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$ **(6 μον)**

Γ ΘΕΜΑ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4+4-4x^2,\ x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$.

Γ1.i. Να δείξετε οτι η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία $(\varepsilon): y=\alpha\cdot x$ όπου $\alpha>0$, ακριβώς ένα κοινό σημείο, με τετμημένη έστω x_0 . **(5 μον)**

ii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)}{f(x)-\alpha\cdot x}$ **(3 μον)**

Γ2. Ένα υλικό σημείο $\mathrm{M}(x, f(x))$ ξεκινά από το σημείο $(0,4)$ και κινείται επί της C_f , με την τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $\dfrac{17}{40}$ μ/s . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω , που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f με τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_0 , που το M διέρχεται από το σημείο με τετμημένη 1 **(6 μον)**

Γ3. Να δείξετε οτι ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης f και είναι $f^{-1}(x)=\sqrt{2-\sqrt{x}},\ x\in[0,4]$ **(4 μον)**

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(4\cdot \sigma\upsilon\nu^4 x)>1$, για $x\in(0,\pi)$ **(7 μον)**

Δ ΘΕΜΑ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)>0$, για την οποία ισχύουν : $f^2(x)+\ln f(x)=e^{2x}+x,\ x\leq 0\ (1)$ και $f'(x)=f(x)\cdot(1+\ln x),\ x>0\ (2)$

Δ1. Να δείξετε οτι $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 0 \\ x^x, & x>0 \end{cases}$ **(7 μον)**

Δ2.i. Να δείξετε οτι $f(x)\geq x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(3 μον)**

ii. Να δείξετε οτι η ευθεία $(\varepsilon): y=x$ δεν είναι ασύμπτωτη της C_f **(3 μον)**

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2)=f(-x^2)$ **(6 μον)**

Δ4. Να δείξετε οτι στο $(-\infty,0]$ υπάρχει μοναδικό $x_0\in(-1,0)$, ώστε η απόσταση του σημείου $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ από την αρχή των αξόνων να είναι ελάχιστη. **(6 μον)**

Καλή επιτυχία

Ν. ΨΑΘΑ - Μαθηματικός

Λύσεις

Α ΘΕΜΑ

Α1. Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, θα είναι αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$

Επομένως για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$, με $x_1<x_2$

- Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$
- Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$
- Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε, ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$

Α2. 2ο θεώρημα (κανόνας) De L' Hospital :

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty,\ x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο, ή άπειρο), τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Α3. **α.** (Ψ)

β. Για τις συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x>0$, $g(x)=\dfrac{2}{x},\ x>0$ ισχύει $f(x)<g(x)$ για κάθε $x>0$, αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

Α4. **α.** (Σ) **β.** (Λ) **γ.** (Σ) **δ.** (Λ) **ε.** (Σ)

Β ΘΕΜΑ

Β1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα $f(0)=0$.

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)-2x+2}{x-2}$, $x\neq 2$ άρα $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2x+2}{x-2}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} g(x)=1$ και

$$f(x)=(x-2)\cdot g(x)+2x-2 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left[(x-2)\cdot g(x)+2x-2\right]=0\cdot 1+2=2$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής και στο 2, οπότε

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=2$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. Έστω οτι η f είναι γνησίως γνησίως φθίνουσα. Τότε $0<2 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(0)>f(2) \Leftrightarrow 0>2$: άτοπο.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Β2. Είναι $f(2)=2$, άρα το $(2,2)\in C_f$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\cdot g(x)+2x-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\cdot(g(x)+2)}{x-2}=$

$$=\lim_{x\to 2}(g(x)+2)=1+2=3.$$

Άρα $f'(2)=3$. Επομένως, η εφαπτομένη της C_f στο $(2,2)$ είναι η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow (\varepsilon): y=3x-4$

Β3. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι και $1-1$.

Επομένως ορίζεται η αντίστροφη της f, στο σύνολο $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

Η ανίσωση $f^{-1}\left(f\left(x^2+x\right)-2\right)>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(f\left(x^2+x\right)-2\right)\right)>f(0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f\left(x^2+x\right)-2>0 \Leftrightarrow f\left(x^2+x\right)>2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(x^2+x\right)>f(2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2+x>2 \Leftrightarrow x^2+x-2>0 \Leftrightarrow x<-2 \text{ ή } x>1$$

Β4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και $0=f(0)<1<f(2)=2$. Άρα, από το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει $x_0\in(0,2)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=1$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[0,x_0]$ και $[x_0,2]$

και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα $(0,x_0)$ και $(x_0,2)$.

Άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχουν $\xi_1 \in (0,x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0,2)$, τέτοια ώστε να ισχύουν $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$ και

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}=\dfrac{2-1}{2-x_0}=\dfrac{1}{2-x_0}$.

Επομένως, είναι $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=x_0+2-x_0=2$

Γ ΘΕΜΑ

Γ1.i. Είναι $f(x)=(x^2-2)^2,\ x\in[0,\sqrt{2}]$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Άρα και η συνάρτηση φ , όπου $\varphi(x)=f(x)-\alpha\cdot x,\ x\in[0,\sqrt{2}]$ είναι συνεχής.

Για κάθε $x\in(0,\sqrt{2})$, $\varphi'(x)=f'(x)-\alpha=4x\cdot(x^2-2)-\alpha=$

$=-\left[4x\cdot(2-x^2)+\alpha\right]<0$, εφόσον $0<x<\sqrt{2}\Rightarrow x^2<2\Leftrightarrow 2-x^2>0$ και $\alpha>0$, άρα $4x\cdot(2-x^2)+\alpha>0$. Επομένως η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα.

Είναι, $\varphi(0)\cdot\varphi(\sqrt{2})=4\cdot(-\sqrt{2}\cdot\alpha)=-4\sqrt{2}\cdot\alpha<0$, εφόσον είναι $\alpha>0$.

Άρα, από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(0,\sqrt{2})$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της φ είναι μοναδικό, τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\alpha\cdot x_0$

Κατά συνέπεια, η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία $(\varepsilon): y=\alpha\cdot x$, όπου $\alpha>0$, ακριβώς ένα κοινό σημείο.

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=\alpha\cdot x_0>0$

Επίσης, το $\lim\limits_{x\to x_0^-}\left(f(x)-\alpha\cdot x\right)=f(x_0)-\alpha\cdot x_0=0$.

Η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα για $x<x_0$, κοντά στο x_0, είναι

$\varphi(x)>\varphi(x_0)\Leftrightarrow f(x)-\alpha\cdot x>0$

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{f(x)-\alpha\cdot x}=+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)}{f(x)-\alpha\cdot x}==\lim\limits_{x\to x_0^-}\left(f(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)-\alpha\cdot x}\right)=\alpha\cdot x_0\cdot(+\infty)=+\infty$

Γ2. Είναι $\varepsilon\varphi\omega=f'(x)\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=4x\cdot\left(x^2-2\right)$. Όταν η τετμημένη του σημείου M μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε και η γωνία ω μεταβάλλεται με το χρόνο, οπότε είναι $\varepsilon\varphi\omega(t)=4\cdot\left(x^3(t)-2x(t)\right)$. Επομένως η γωνία ω μεταβάλλεται με ρυθμό :

$\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\cdot\omega'(t)=4\cdot\left(3x^2(t)\cdot x'(t)-2x'(t)\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(1+\varepsilon\varphi^2\omega(t)\right)\cdot\omega'(t)=4\cdot\left(3x^2(t)-2\right)\cdot x'(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 που το υλικό σημείο M διέρχεται από το $(1,1)$ είναι $\left(1+\varepsilon\varphi^2\omega(t_0)\right)\cdot\omega'(t_0)=4\cdot\left(3x^2(t_0)-2\right)\cdot x'(t_0)$, με $\varepsilon\varphi(t_0)=f'(1)=-4$, $x(t_0)=1\ \mu$ $x'(t_0)=\dfrac{17}{40}\ \mu/s$. Άρα $(1+16)\cdot\omega'(t_0)=4\cdot\dfrac{17}{40}\Leftrightarrow\omega'(t_0)=0{,}1\ \mathrm{rad}/s$

Γ3. Για κάθε $x\in\left(0,\sqrt{2}\right)$, είναι $f'(x)=4x\cdot\left(x^2-2\right)=-4x\cdot\left(2-x^2\right)<0$, άρα η συνάρτηση f είναι γν. φθίνουσα, άρα και $1-1$. Επομένως, ορίζεται η αντίστροφη της f , στο $D_{f^{-1}}=f\left(\left[0,\sqrt{2}\right]\right)=\left[f\left(\sqrt{2}\right),f(0)\right]=[0,4]$, γιατί η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής.

Έστω $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$.

Τότε $\left(x^2-2\right)^2=y\Leftrightarrow\left|x^2-2\right|=\sqrt{y}\overset{x^2-2\le0}{\Leftrightarrow}\Leftrightarrow2-x^2=\sqrt{y}\Leftrightarrow x^2=2-\sqrt{y}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|x|=\sqrt{2-\sqrt{y}}\overset{x\ge0}{\Leftrightarrow}x=\sqrt{2-\sqrt{y}},\ y\in[0,4]$.

Άρα $f^{-1}(y)=\sqrt{2-\sqrt{y}},\ y\in[0,4]$ και τελικά, $f^{-1}(x)=\sqrt{2-\sqrt{x}},\ x\in[0,4]$

Γ4. Για $x\in(0,\pi)$, η ανίσωση $f^{-1}\left(4\cdot\sigma\upsilon\nu^4x\right)>1\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}\left(4\cdot\sigma\upsilon\nu^4x\right)\right)<f(1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow4\cdot\sigma\upsilon\nu^4x<1\Leftrightarrow2\cdot\sigma\upsilon\nu^2x<1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2x<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|\sigma\upsilon\nu x|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sigma\upsilon\nu x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\dfrac{3\pi}{4}<\sigma\upsilon\nu x<\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}\overset{\sigma\upsilon\nu x\downarrow(0,\pi)}{\Leftrightarrow}\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3\pi}{4}$

Δ ΘΕΜΑ

Δ1. Η συνάρτηση $\varphi(x)=x^2+\ln x,\ x>0$ έχει $\varphi'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$, για κάθε $x>0$ επομένως είναι γνησίως αύξουσα , άρα και $1-1$.

Είναι $f(x)>0$, άρα για $x\le 0$, η σχέση (1) γίνεται :

$\varphi(f(x))=\varphi(e^x)\overset{\varphi 1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=e^x,\ x\le 0$.

Για $x>0$, η σχέση $(2)\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=1+\ln x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\ln f(x))'=(x\cdot\ln x)'\Leftrightarrow$ υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε για κάθε $x>0$,

$\ln f(x)=\ln x^x+c\Leftrightarrow\Leftrightarrow \ln f(x)=\ln\left(x^x\cdot e^c\right)\overset{\ln 1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=x^x\cdot e^c$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=e^c\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\cdot\ln x}=e^c\cdot e^0=e^c$, εφόσον

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\ \underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\ \lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Το $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=1$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής , άρα $e^c=1\Leftrightarrow c=0$.

Επομένως , $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0\\ x^x, & x>0\end{cases}$

Δ2.i. • Για κάθε $x\le 0$, $e^x>0\Leftrightarrow f(x)>0$, άρα $f(x)>x$.

• Για $x>0$, η σχέση $f(x)\ge x\Leftrightarrow x^x\ge x\Leftrightarrow\Leftrightarrow x\cdot\ln x\ge\ln x\Leftrightarrow(x-1)\cdot\ln x\ge 0$ (3)

Για $0<x\le 1$ είναι $x-1\le 0$ και $\ln x\le 0$, άρα $(x-1)\cdot\ln x\ge 0$.

Και για $x>1$ είναι $x-1>0$ και $\ln x>0$, άρα $(x-1)\cdot\ln x\ge 0$

Επομένως ισχύει η σχέση (3) ,άρα και η αρχική .

Τελικά ισχύει $f(x)\ge x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, άρα η C_f έχει (οριζόντια) ασύμπτωτη την ευθεία $y=0$ στο $-\infty$.

Επίσης, το $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^x-x)=$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(x^{x-1}-1\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(e^{(x-1)\cdot\ln x}-1\right)\right] = +\infty$,

εφόσον είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{(x-1)\cdot\ln x}-1\right) \overset{u=(x-1)\cdot\ln x}{=} \lim\limits_{u\to+\infty}\left(e^{u}-1\right) = +\infty$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ δεν είναι ασύμπτωτη της C_f ούτε στο $+\infty$

Δ3. Η εξίσωση $f\left(x^2\right) = f\left(-x^2\right)$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και έχει προφανή ρίζα το 0 .

Για κάθε $x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow -x^2 < 0$ και τότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\left(x^2\right)^{x^2} = e^{-x^2}$. Θέτω $x^2 = u > 0$.

Άρα $u^u = e^{-u} \Leftrightarrow u\cdot\ln u = -u \Leftrightarrow \overset{u>0}{\Leftrightarrow} \ln u = -1 \Leftrightarrow u = e^{-1} \Leftrightarrow x^2 = e^{-1} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Επομένως το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης είναι το $\left\{0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right\}$

Δ4. Έστω $M\left(x, f(x)\right)$ τυχαίο σημείο της C_f με $x \le 0$. Η απόστασή του από την αρχή των αξόνων δίνεται από τη συνάρτηση $d(x) = \sqrt{x^2 + e^{2x}},\ x \le 0$.

Η συνάρτηση d είναι συνεχής . Για κάθε $x < 0$, $d'(x) = \dfrac{x + e^{2x}}{\sqrt{x^2 + e^{2x}}}$.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $g(x) = x + e^{2x}, x \le 0$.

Για κάθε $x < 0$, $g'(x) = 1 + 2e^{2x} > 0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα .

Το $g(-1) = -1 + e^{-2} = e^{-2}\cdot\left(1 - e^2\right) < 0$ και $g(0) = 1 > 0$, άρα $g(-1)\cdot g(0) < 0$.

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (-1, 0)$, μοναδικό λόγω της μονοτονίας της g , τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow d'(x_0) = 0$.

Τότε , για κάθε $x < x_0 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x_0) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow d'(x) < 0$, άρα η συνάρτηση d είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$.

Ομοίως, αν $x_0 < x < 0 \Leftrightarrow \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(x_0) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow d'(x) > 0$, άρα η συνάρτηση d είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, 0]$.

Επομένως , η συνάρτηση d γίνεται ελάχιστη στο σημείο $M\left(x_0, f(x_0)\right)$, για μοναδικό $x_0 \in (-1, 0)$.