ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΕΠΑΛ 09-05-2021

ΛΥΣΕΙΣ

Α ΘΕΜΑ

Α1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Για $h\neq 0$, είναι :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}=2x+h,$$ άρα

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$. Επομένως, $f'(x)=2x$

Α2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής , όταν για κάθε $x_0\in \mathrm{A}$, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Α3. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0\in \mathrm{A}$ ολικό μέγιστο το $f(x_0)$, όταν ισχύει $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in \mathrm{A}$

Α4. **α. Λ** **β. Σ** **γ. Λ** **δ. Σ** **ε. Λ**

Β ΘΕΜΑ

Β1. Σύμφωνα με το κυκλικό διάγραμμα, μέγιστη θερμοκρασία χαμηλότερη από 10 βαθμούς Κελσίου είχε το $F_2\%=(f_1+f_2)\%=(6+16)\%=22\%$ των ημερών.

Άρα $F_2=\frac{\mathrm{N}_2}{\nu}\Leftrightarrow\frac{22}{100}=\frac{33}{\nu}\overset{:11}{\Leftrightarrow}\frac{2}{100}=\frac{3}{\nu}\Leftrightarrow 2\nu=300\Leftrightarrow \nu=150$ ημέρες.

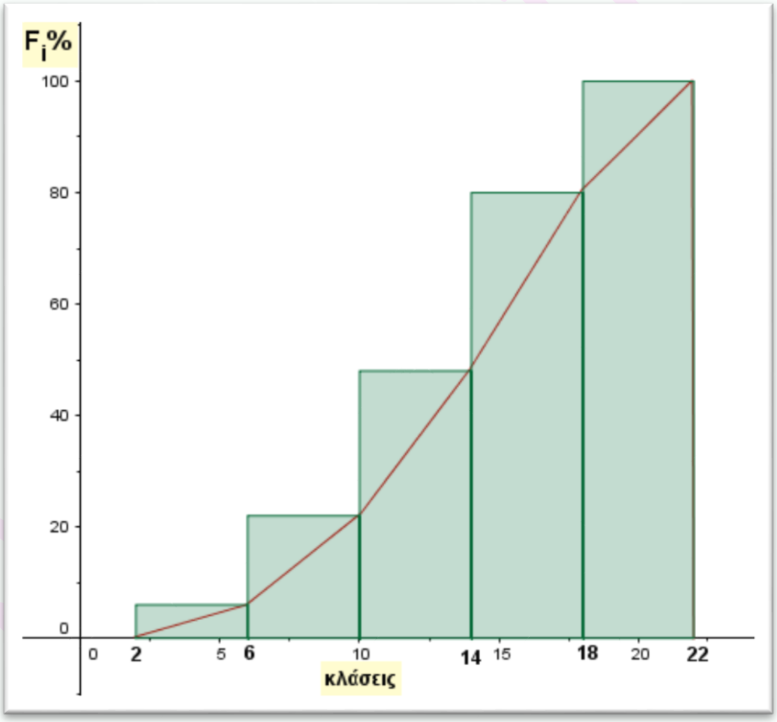
Β2. Με τα δεδομένα του κυκλικού διαγράμματος, οι κλάσεις και οι σχετικές συχνότητες συμπληρώνονται άμεσα . Επίσης ισχύει : $f_i=\frac{\nu_i}{\nu}\Leftrightarrow \nu_i=f_i\cdot\nu$.

Επομένως, $\nu_1=f_1\cdot\nu\Rightarrow\nu_1=0,06\cdot150=9$, $\nu_2=f_2\cdot\nu\Rightarrow\nu_2=0,16\cdot150=24$,

$\nu_3 = f_3 \cdot \nu \Rightarrow \nu_3 = 0,26 \cdot 150 = 39$, $\nu_4 = f_4 \cdot \nu \Rightarrow \nu_4 = 0,32 \cdot 150 = 48$ και $\nu_5 = f_5 \cdot \nu \Rightarrow \nu_5 = 0,20 \cdot 150 = 30$

κλάσεις	x_i	ν_i	N_i	f_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
[2, 6)	4	9	9	0,06	6	0,06	6
[6, 10)	8	24	33	0,16	16	0,22	22
[10,14)	12	39	72	0,26	26	0,48	48
[14,18)	16	48	120	0,32	32	0,80	80
[18,22)	20	30	150	0,20	20	1,00	100
	Σύνολο	150	.	1	100		

B3. Σύμφωνα με τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα, προκύπτει το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων :



B4.i. Σύμφωνα με τον πίνακα συχνοτήτων, η μέγιστη θερμοκρασία στην πόλη ήταν το πολύ 14 βαθμοί, συνολικά $N_3 = N_2 + \nu_3 = 33 + 39 = 72$ ημέρες

ii. Σύμφωνα με τον πίνακα συχνοτήτων, η μέγιστη θερμοκρασία στην πόλη ήταν τουλάχιστον 10 βαθμοί, $\mathrm{N}_5-\mathrm{N}_2=150-33=117$ ημέρες

(ή $\nu_3+\nu_4+\nu_5=39+48+30=117$ ημέρες)

iii. Σύμφωνα με τον πίνακα συχνοτήτων, το ποσοστό των ημερών, κατά τις οποίες η μέγιστη θερμοκρασία κυμάνθηκε μεταξύ 6 και 18 βαθμών Κελσίου, είναι $(\mathrm{F}_4-\mathrm{F}_1)\%=(80-6)\%=74\%$

Γ ΘΕΜΑ

Γ1.i. Πρέπει $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$ και $x-5\neq 0\Leftrightarrow x\neq 5$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $[1,5)\cup(5,+\infty)$

ii. Το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{2x-1}=\dfrac{g(2)}{3}=\dfrac{\frac{-4}{-3}}{3}=\dfrac{4}{9}$

Γ2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει το άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -3, άρα $f(0)=-3\Leftrightarrow \beta=-3$.

Επίσης είναι $\alpha=\lim\limits_{x\to 5}g(x)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4\left(\sqrt{x-1}-2\right)}{x-5}=4\cdot\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\cdot\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$

$=4\cdot\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-1-4}{(x-5)\cdot\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=4\cdot\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}=4\cdot\dfrac{1}{4}=1$. Άρα $\alpha=1,\ \beta=-3$

Γ3.i. Για $\alpha=1,\ \beta=-3$, είναι $f(x)=x^2-2x-3=(x+1)\cdot(x-3)$.

Έτσι, η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν

$f(x)<0\Leftrightarrow(x+1)\cdot(x-3)<0\Leftrightarrow -1<x<3\Leftrightarrow x\in(-1,3)$

ii. Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow x=-1,$ ή $x=3$ και $f(x)<0\Leftrightarrow x\in(-1,3)$, άρα $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

Το $\frac{6}{5}>1 \Leftrightarrow -\frac{6}{5}<-1$, άρα $f\left(-\frac{6}{5}\right)>0$,

ενώ το $\frac{7}{8}<1 \Rightarrow -1<-\frac{7}{8}<3$, άρα $f\left(-\frac{7}{8}\right)<0$.

Επομένως είναι $f\left(-\frac{6}{5}\right)>0>f\left(-\frac{7}{8}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{7}{8}\right)<f\left(-\frac{6}{5}\right)$

Γ4. Είναι $f'(x)=2x-2,\ x\in\mathbb{R}$. Επίσης, $f(-1)=0\neq -1$, άρα το $\mathrm{A}(-1,-1)\notin \mathrm{C}_f$
Έστω $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής και $(\varepsilon): y=f'(x_0)\cdot x+\lambda$, η ζητούμενη εφαπτομένη .
Το σημείο $(-1,-1)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow -1=-f'(x_0)+\lambda \Leftrightarrow -1=-2x_0+2+\lambda \Leftrightarrow \lambda=2x_0-3\ (1)$
Επίσης :

$$(x_0, f(x_0))\in(\varepsilon)\Leftrightarrow f(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0+\lambda \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_0^{\ 2}-2x_0-3=2x_0^{\ 2}-2x_0+2x_0-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0^{\ 2}+2x_0=0\Leftrightarrow x_0(x_0+2)=0\Leftrightarrow x_0=0, \text{ ή } x_0=-2$$

Για $x_0=0$ είναι $f'(0)=-2$ και από την $(1)\Rightarrow \lambda=-3$. Άρα $(\varepsilon_1): y=-2x-3$

Για $x_0=-2$ είναι $f'(-2)=-6$ και από την $(1)\Rightarrow \lambda=-7$. Άρα $(\varepsilon_2): y=-6x-7$

Δ ΘΕΜΑ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη , με
$f'(x)=4x^3+3\alpha x^2+96x-64,\ x\in(0,4)$.

Παρουσιάζει παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, στο σημείο της $(1,-17)$, άρα ισχύουν :
$f(1)=-17$ και $f'(1)=0$.

Η σχέση $f'(1)=0\Leftrightarrow 4+3\alpha+96-64=0\Leftrightarrow 3\alpha=-36\Leftrightarrow \alpha=-12$.

Τότε $f(1)=-17\Leftrightarrow 1-12+48-64+\beta=-17\Leftrightarrow 49-76+\beta=-17\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -27+\beta=-17\Leftrightarrow \beta=10$

Δ2. Για $\alpha=-12,\ \beta=10$ είναι $f(x)=x^4-12x^3+48x^2-64x+10,\ x\in(0,4)$, άρα για κάθε $x\in(0,4)$, είναι $f'(x)=4x^3-36x^2+96x-64=4\left(x^3-9x^2+24x-16\right)\overset{Horner}{=}4(x-1)\left(x^2-8x+16\right)=4(x-1)(x-4)^2$. Επομένως $f'(x)=0\overset{x\in(0,4)}{\Leftrightarrow}x=1$, εφόσον είναι $0<x<4\Rightarrow x-4<0\Leftrightarrow(x-4)^2\neq 0$. Άρα μοναδική εφαπτομένη της C_f , παράλληλη στον άξονα $x'x$ είναι αυτή που διέρχεται από το σημείο $(1,-17)$, επομένως η ευθεία $(\varepsilon): y=0\cdot x+(-17)\Leftrightarrow(\varepsilon): y=-17$

Δ3. Για κάθε $x\in(0,4)$, είναι $f'(x)=4\left(x^3-9x^2+24x-16\right)$, επομένως $f''(x)=4\left(3x^2-18x+24\right)=12\left(x^2-6x+8\right)=12(x-2)(x-4)$, με $x\in(0,4)$,οπότε $x-4<0$. Έτσι, $f''(x)=0\Leftrightarrow x=2$,

$f''(x)<0\Leftrightarrow\left(x-2>0 \text{ και } x\in(0,4)\right)\Leftrightarrow 2<x<4$

και

$f''(x)>0\Leftrightarrow\left(x-2<0 \text{ και } x\in(0,4)\right)\Leftrightarrow 0<x<2$.

x	0		2		4
$f''(x)$		+	0	−	
$f'(x)$		↗	ο.μ	↘	

Επομένως η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,4)$. Παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=2$, το $f'(2)=16$.

Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=2$, έχει τον μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης 16

Δ1.i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4(x-1)(x-4)^2-(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left[4(x-4)^2-1\right]}{(x-1)(x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4(x-4)^2-1}{x+1}=\dfrac{4\cdot 9-1}{2}=\dfrac{35}{2}$

ii. Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)=4\cdot 2\cdot(-1)^2=8$

Ν. ΨΑΘΑ

Μαθηματικός