2ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΕΠΑΛ 21-05-21

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Α ΘΕΜΑ

Α1. Αν f, g είναι δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, με πεδίο ορισμού A, να αποδείξετε οτι ισχύει: $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$

Α2. Πότε λέμε οτι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή **(Σ)**, ή Λάθος **(Λ)**

α) Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων παρατηρήσεων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος

β) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποιοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.

γ) Για τις σχετικές συχνότητες $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$ των τιμών x_i μιας μεταβλητής X, ισχύει η ιδιότητα $f_1 + f_2 + \dots f_\kappa = \kappa$

δ) Ισχύει οτι $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$

ε) Υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού τους

(9+6+5x2 μον)

Β ΘΕΜΑ

Ο χρόνος (σε λεπτά), που χρειάζονται οι μαθητές του Λυκείου μιας κωμόπολης, για να φτάσουν περπατώντας στο σχολείο τους, ομαδοποιήθηκε σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Το 60% των μαθητών χρειάζεται λιγότερο από 8 λεπτά , ενώ το 75% των μαθητών χρειάζεται τουλάχιστον 6 λεπτά.

χρόνος	x_i	$f_i\%$	$F_i\%$	ν_i	N_i
[2,)					
[,)		20			
[,)					
[,)		30			
[, 12)					
	Σύνολο				

Β1. Να δείξετε οτι το πλάτος της κάθε κλάσης είναι 2 λεπτά και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τις δυο πρώτες στήλες του πίνακα

Β2. Να συμπληρώσετε τις στήλες των σχετικών συχνοτήτων και των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων

Β3. Αν 12 μαθητές φτάνουν στο σχολείο τους σε λιγότερο από 4 λεπτά, να βρείτε το σύνολο των μαθητών του σχολείου . Στη συνέχεια, να συμπληρώσετε τις δυο τελευταίες στήλες του πίνακα

Β4. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων

(6+6+8+5 μον)

Γ ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2},\ x>2$

Γ1.i. Να δείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2},\ x>2$

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=3$

Γ2. Να λύσετε στο $(0,\pi)$, την ανίσωση $f\left(\sigma\upsilon\nu^2 x+3\right)\le 6$

Γ3. Να δείξετε ότι $f''(3)=2$

Γ4. Αν (ε) είναι η εφαπομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f' στο σημείο της $(3,0)$, να δείξετε ότι η εξίσωσή της είναι η $(\varepsilon): y=2x-6$. Έστω A,B τα σημεία τομής της (ε) με τον άξονα $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου O η αρχή των αξόνων.

((4+3)+6+7+5 μον)

Δ ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+2f(1)\sqrt{x},\ x>0$

Δ1.i. Να δείξετε ότι $f(1)=-1$

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Δ2.i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -2

ii. Να λύσετε την ανίσωση $2\left(f(x)+2\right)\le x$

Δ3. Να δείξετε ότι $f'(4)+8\cdot f''(4)=1+f(4)$

Δ4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)+x^2-5x+4}{x-4}$ **((3+4)+(4+3)+4+7)**

Καλή επιτυχία

Ν.ΨΑΘΑ - Μαθηματικός

2ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΕΠΑΛ 21-05-21

ΛΥΣΕΙΣ

Α ΘΕΜΑ

Α1. Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$.

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=\big(f(x+h)+g(x+h)\big)-\big(f(x)+g(x)\big)=$
$=\big(f(x+h)-f(x)\big)-\big(g(x+h)-g(x)\big)$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

άρα $\big(f(x)+g(x)\big)'=f'(x)+g'(x)$

Α2. Αν το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και γράφουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Α3. α) **(Σ)** β) **(Λ)** γ) **(Λ)** δ) **(Λ)** ε) **(Σ)**

Β ΘΕΜΑ

Β1. Αν c είναι το πλάτος της κάθε κλάσης, τότε $2+5c=12 \Leftrightarrow 5c=10 \Leftrightarrow c=2$. Επομένως οι δυο πρώτες στήλες συμπληρώνονται άμεσα:

χρόνος	x_i
[2, 4)	3
[4, 6)	5
[6, 8)	7
[8, 10)	9
[10, 12)	11
	Σύνολο

Β2. Το 60% των μαθητών χρειάζεται λιγότερο από 8 λεπτά, άρα $F_3\%=60$. Επίσης, δίνεται ότι το 75% των μαθητών χρειάζεται τουλάχιστον 6 λεπτά, άρα $F_5\%-F_2\%=75 \Leftrightarrow 100-F_2\%=75 \Leftrightarrow F_2\%=25$

Σύμφωνα με τα παραπάνω στοιχεία συμπληρώνονται και οι δυο στήλες των σχετικών και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων αντίστοιχα

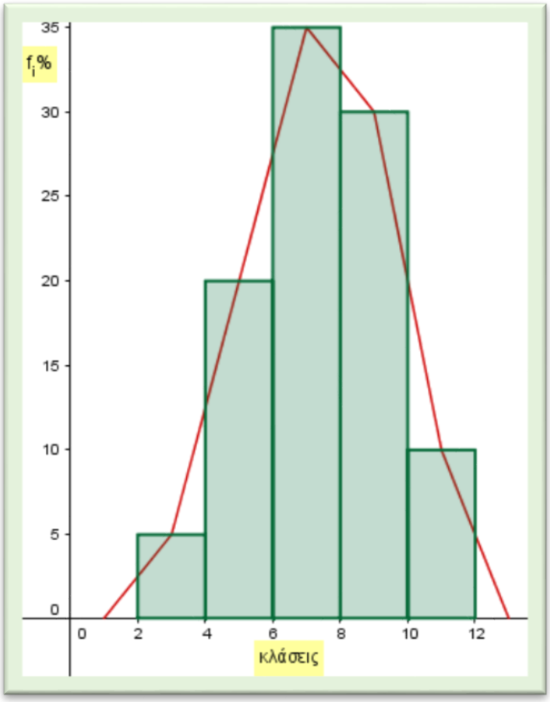
χρόνος	x_i	$f_i\%$	$F_i\%$
[2, 4)	3	5	5
[4, 6)	5	20	25
[6, 8)	7	35	60
[8, 10)	9	30	90
[10, 12)	11	10	100
	Σύνολο		

Β3. Δίνεται ότι 12 μαθητές φτάνουν στο σχολείο τους σε λιγότερο από 4 λεπτά, άρα $\nu_1=12$ και $f_1=\frac{\nu_1}{\nu}$, άρα $\frac{5}{100}=\frac{12}{\nu} \Leftrightarrow \frac{1}{20}=\frac{12}{\nu} \Leftrightarrow \nu=20\cdot 12 \Leftrightarrow \nu=240$ μαθητές

Τότε $\nu_2=f_2\cdot\nu=\frac{20}{100}\cdot 240=48$, $\nu_3=f_3\cdot\nu=\frac{35}{100}\cdot 240=\frac{7}{20}\cdot 240=7\cdot 12=84$, $\nu_4=f_4\cdot\nu=\frac{30}{100}\cdot 240=72$ και τέλος $\nu_5=f_5\cdot\nu=\frac{10}{100}\cdot 240=24$

χρόνος	x_i	$f_i\%$	$F_i\%$	v_i	N_i
[2, 4)	3	5	5	12	12
[4, 6)	5	20	25	48	60
[6, 8)	7	35	60	84	144
[8, 10)	9	30	90	72	216
[10, 12)	11	10	100	24	240
	Σύνολο			240	

B4. Σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα, το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων είναι :



Γ ΘΕΜΑ

Γ1.i. Είναι $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-3}{x-2}\right)'=\dfrac{(x^2-3)'\cdot(x-2)-(x^2-3)\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=$

$$=\frac{2x\cdot(x-2)-(x^2-3)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2+3}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2},\ x>2$$

ii. Το τριώνυμο x^2-4x+3 έχει $\Delta=16-12=4>0$ και ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}1\\3\end{cases}$,

άρα είναι $f'(x)=\dfrac{(x-1)\cdot(x-3)}{(x-2)^2}$. Για $x>2$ είναι $x-1>1>0$ και $(x-2)^2>0$, άρα ο πίνακας προσήμων της $f'(x)$ και μεταβολών της συνάρτησης f είναι :

x	2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$	

Έτσι, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=3$, $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in(2,3)$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(3,+\infty)$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$.
Παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=3$, το $f(3)=6$

Γ2. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=3$, το $f(3)=6$, επομένως για κάθε $x>2$ ισχύει ότι $f(x)\geq f(3)\Leftrightarrow f(x)\geq 6$.

Άρα είναι και $f(\text{συν}^2x+3)\geq 6$. Εφόσον ισχύει και $f(\text{συν}^2x+3)\leq 6$, τελικά είναι

$$f(\text{συν}^2x+3)=6\Leftrightarrow \text{συν}^2x+3=3\Leftrightarrow \text{συν}^2x=0\Leftrightarrow \text{συν}x=0\overset{x\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{2}$$

Γ3. Είναι

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(x^2-4x+3)'\cdot(x-2)^2-(x^2-4x+3)\cdot\left((x-2)^2\right)'}{(x-2)^4}=$$

$$=\frac{(2x-4)\cdot(x-2)^2-(x^2-4x+3)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}=$$

$$=\frac{(x-2)\cdot(2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x-6)}{(x-2)^4}=\frac{2}{(x-2)^3}$$, άρα $f''(3)=2$

β΄τρόπος.

Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(3+h)-f'(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{(h+2)h}{(h+1)^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(h+2)\cdot h}{h\cdot(h+1)^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h+2}{(h+1)^2}=2$, άρα $f''(3)=2$

Γ4. Έστω $(\varepsilon): y=\lambda x+\kappa$. Το $\lambda=f''(3)=2$, άρα $(\varepsilon): y=2x+\kappa$ και διέρχεται από το σημείο $(3,0)$, άρα ισχύει $0=2\cdot 3+\kappa \Leftrightarrow \kappa=-6$. Επομένως $(\varepsilon): y=2x-6$

Το σημείο τομής A της ευθείας (ε) με τον άξονα $x'x$ έχει τεταγμένη $y=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$, άρα είναι το σημείο $\mathrm{A}(3,0)$.

Το σημείο τομής B της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$ έχει τετμημένη $x=0 \Leftrightarrow y=2\cdot 0-6 \Leftrightarrow y=-6$, άρα είναι το σημείο $\mathrm{B}(0,-6)$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου OAB ισούται με

$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{OA})\cdot(\mathrm{OB})=\frac{1}{2}\cdot|3|\cdot|-6|=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6=9$ τ.μ.

Δ ΘΕΜΑ

Δ1.i. Από τη σχέση $f(x)=x+2f(1)\sqrt{x},\ x>0$, θέτοντας $x=1$ προκύπτει ότι $f(1)=1+2f(1)\Leftrightarrow f(1)-2f(1)=1\Leftrightarrow -f(1)=1\Leftrightarrow f(1)=-1$

ii. Εφόσον $f(1)=-1$, η συνάρτηση είναι $f(x)=x-2\sqrt{x},\ x>0$. Άρα

$$f'(x)=\left(x-2\sqrt{x}\right)'=1-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{x-1}{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1,\ f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow x>1$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$, το $f(1)=1-2=-1$

Δ2.i. Έστω $(\varepsilon): y=\lambda x+\kappa$ η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης της C_f Η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-2)$, άρα $-2=\lambda\cdot 0+\kappa\Leftrightarrow\kappa=-2$. Επομένως $(\varepsilon): y=\lambda x-2$. Έστω $\mathrm{M}\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής.
Τότε $\lambda=f'(x_0)$, άρα $(\varepsilon): y=f'(x_0)\cdot x-2$.

Επομένως $f(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0-2\Leftrightarrow x_0-2\sqrt{x_0}=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}\right)\cdot x_0-2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_0-2\sqrt{x_0}=x_0-\frac{x_0}{\sqrt{x_0}}-2\Leftrightarrow -2\sqrt{x_0}=-\frac{x_0}{\sqrt{x_0}}-2\Leftrightarrow 2x_0=x_0+2\sqrt{x_0}\Leftrightarrow x_0=2\sqrt{x_0}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_0^{\ 2}=4x_0\overset{x_0>0}{\Leftrightarrow} x_0=4$. Είναι $f'(4)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$, άρα τελικά $(\varepsilon): y=\dfrac{1}{2}\cdot x-2$.

ii. Η ανίσωση

$$2\left(f(x)+2\right)\le x\Leftrightarrow 2\left(x-2\sqrt{x}+2\right)\le x\Leftrightarrow 2x-4\sqrt{x}+4-x\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+4\le 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2-4\sqrt{x}+4\le 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)^2\le 0\Leftrightarrow\sqrt{x}-2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$$

Δ3. Είναι $f''(x)=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$, άρα $f''(4)=\dfrac{1}{8\sqrt{4}}=\dfrac{1}{16}$.

Τότε : $f'(4)+8\cdot f''(4)=\dfrac{1}{2}+8\cdot\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1+0=1+f(4)$

Δ4. Το $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)+x^2-5x+4}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)+(x-1)(x-4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{f(x)}{x-4}+x-1\right)=$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}+x-1\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\left(x-2\sqrt{x}\right)\left(x+2\sqrt{x}\right)}{(x-4)\left(x+2\sqrt{x}\right)}+x-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2-4x}{(x-4)\left(x+2\sqrt{x}\right)}+x-1\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{x(x-4)}{(x-4)\left(x+2\sqrt{x}\right)}+x-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}}+x-1\right)=\frac{4}{8}+3=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$$