ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΘΕΜΑ ΣΕ ΟΛΗ (σχεδόν) ΤΗΝ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Ν. ΨΑΘΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ-ΣΥΓΓΡΑΦΕΑΣ

01-01-2022, Δ ΘΕΜΑ, Ν.ΨΑΘΑ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $x^2 \cdot f'(e^x) + e^{-x} = 0$, για κάθε $x \neq 0$, $f(e) = 1$ και $f(e^{-1}) = -1$

Δ1. Να δείξετε οτι $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, $x \in A = (0,1) \cup (1,+\infty)$

Δ2.i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Δ3.i. Να δείξετε οτι ορίζεται και να βρείτε, την αντίστροφη της συνάρτησης f

ii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[f(x) \cdot \left(f^{-1}(x) - x \cdot \eta\mu f^{-1}(x) \right) \right]$

Δ4.i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = e$ και να εξετάσετε αν η (ε) έχει και άλλα κοινά σημεία με τη C_f

Δ5. Να δείξετε οτι η εξίσωση $\frac{2}{f(x)-1}=\frac{x}{\eta\mu(x-2)}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2,e)$

Δ6. Να δείξετε οτι για κάθε $x>e$ ισχύει: $(\ln x-1)\cdot\ln x>1-\frac{e}{x}$

Δ7. Ένα υλικό σημείο $M(\alpha,f(\alpha)),\alpha>1$ κινείται στη γραφική παράσταση της f με την τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2\alpha\,cm/s$. Αν η εφαπτομένη (ζ) της C_f στο σημείο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(x_A,0)$, τότε:

i. να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου A , τη χρονική στιγμή t_0, που η ευθεία (ζ) συμπίπτει με την ευθεία (ε)

ii. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ζ) με τον άξονα $x'x$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω, τη χρονική στιγμή t_0.

Δ8. Να δείξετε οτι η εξίσωση $f'(x)=\frac{1-f(x)}{x-2}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2,e)$

Δ9. Να υπολογίσετε το $I=\int_e^{e^2} f(e^x)\cdot f^2(x)dx$

Δ10. Να δείξετε οτι $\int_2^4 x^2\cdot f(x)dx>8+\ln 3$

psathamaths.gr

Καλή Χρονιά, με υγεία και επιτυχίες!!!

psathamaths.gr

Λύση

Δ1. Για κάθε $x \neq 0$, η σχέση

$$x^2 \cdot f'(e^x) + e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot f'(e^x) \cdot e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(e^x) \cdot e^x = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(e^x)\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow f(e^x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + c_1, & x < 0 \\ \frac{1}{x} + c_2, & x > 0 \end{cases}.$$

Είναι $f(e^{-1}) = -1 \Leftrightarrow -1 + c_1 = -1 \Leftrightarrow c_1 = 0$ και $f(e) = 1 \Leftrightarrow 1 + c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = 0$.

Άρα $f(e^x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$. Θέτω $e^x = u > 0$ και $x \neq 0 \Leftrightarrow u \neq 1$.

Τότε: $e^x = u \Leftrightarrow x = \ln u, u \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, άρα $f(u) = \frac{1}{\ln u}, u \in A = (0,1) \cup (1,+\infty)$

Επομένως $f(x) = \frac{1}{\ln x}, x \in A = (0,1) \cup (1,+\infty)$

β΄τρόπος. Για $x \neq 0$, θέτω $e^x = u > 0 \Leftrightarrow x = \ln u, u \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ Τότε η σχέση

$$x^2 \cdot f'(e^x) + e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \ln^2 u \cdot f'(u) + \frac{1}{u} = 0 \Leftrightarrow f'(u) = -\frac{1}{u \cdot \ln^2 u} \Leftrightarrow f'(u) = \left(\frac{1}{\ln u}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(u) = \begin{cases} \frac{1}{\ln u} + c_1, & u \in (0,1) \\ \frac{1}{\ln u} + c_2, & u \in (1,+\infty) \end{cases}$$ κλπ.

Δ2.i. Για κάθε $x \in A$ είναι $f'(x) = -\frac{1}{x \cdot \ln^2 x} < 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $A_1 = (0,1)$ και $A_2 = (1,+\infty)$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} \overset{u=\ln x}{=} \lim\limits_{u\to -\infty} \frac{1}{u} = 0$, άρα η ευθεία $x=0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$, δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Το $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x} \overset{u=\ln x}{=} \lim\limits_{u\to 0^-} \frac{1}{u} = -\infty$, άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης, το $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln x} \overset{u=\ln x}{=} \lim\limits_{u\to +\infty} \frac{1}{u} = 0$, άρα η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

iii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $A_1 = (0,1)$ και $A_2 = (1,+\infty)$, επομένως τα σύνολα τιμών της στα A_1 και A_2 αντίστοιχα είναι τα διαστήματα: $f(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x), \lim\limits_{x\to 0} f(x)\right) = (-\infty, 0)$ και $f(A_2) = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right) = (0,+\infty)$ εφόσον $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x} \overset{u=\ln x}{=} \lim\limits_{u\to 0^+} \frac{1}{u} = +\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty,0)\cup(0,+\infty) = \mathbb{R}^*$

Δ3.i. Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x_1} = \frac{1}{\ln x_2} \Leftrightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Άρα η συνάρτηση f είναι $1-1$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη της f στο σύνολο $D_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R}^*$. Έστω οτι $f(x) = y \neq 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \in A$. Τότε προκύπτουν:

$\frac{1}{\ln x} = y \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{y}}$, οπότε $f^{-1}(y) = e^{\frac{1}{y}}, y \neq 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = e^{\frac{1}{x}}, x \neq 0$

ii. $\lim\limits_{x\to0^+}\left[f(x)\cdot\left(f^{-1}(x)-x\cdot\eta\mu f^{-1}(x)\right)\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-x\cdot\eta\mu e^{\frac{1}{x}}}{\ln x}\overset{u=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u-\frac{1}{u}\cdot\eta\mu e^u}{\ln u^{-1}}=$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-\dfrac{e^u}{\ln u}+\dfrac{1}{\ln u}\cdot\left(\dfrac{1}{u}\cdot\eta\mu e^u\right)\right)=-\infty$, εφόσον είναι:

- $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{-e^u}{\ln u}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L.H.}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-u\cdot e^u\right)=-(+\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$ και
- $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{\ln u}\overset{\ln u=t}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t}=0$ και $\left|\dfrac{1}{u}\cdot\eta\mu e^u\right|=\left|\dfrac{1}{u}\right|\cdot\left|\eta\mu e^u\right|\le\left|\dfrac{1}{u}\right|\Leftrightarrow-\left|\dfrac{1}{u}\right|\le\dfrac{1}{u}\cdot\eta\mu e^u\le\left|\dfrac{1}{u}\right|$, με

  $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\pm\left|\dfrac{1}{u}\right|\right)=0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής, είναι και $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}\cdot\eta\mu e^u=0$

Δ4.i. Για κάθε $x\in A$ είναι $f''(x)=\left(-\dfrac{1}{x\cdot\ln^2x}\right)'=\dfrac{1}{x^2\cdot\ln^4x}\cdot\left(x\cdot\ln^2x\right)'=$

$=\dfrac{1}{x^2\cdot\ln^4x}\cdot\left(\ln^2x+x\cdot2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\ln x\cdot(\ln x+2)}{x^2\cdot\ln^4x}=\dfrac{\ln x+2}{x^2\cdot\ln^3x}$. Επομένως:

- $f''(x)=0\Leftrightarrow\ln x=-2\Leftrightarrow x=e^{-2}$ και
- $f''(x)<0\Leftrightarrow\ln x\cdot(\ln x+2)<0\Leftrightarrow-2<\ln x<0\Leftrightarrow\ln e^{-2}<\ln x<\ln1\Leftrightarrow e^{-2}<x<1$
- $f''(x)>0\Leftrightarrow x\in\left(0,e^{-2}\right)\cup(1,+\infty)$

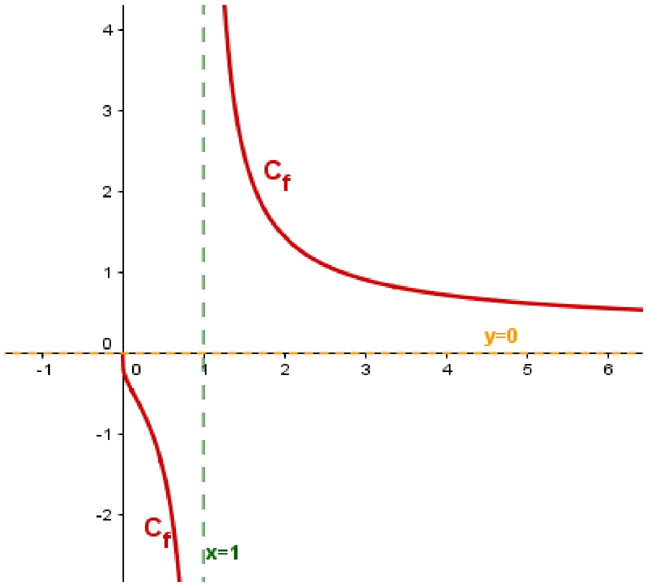
x	0 $\qquad e^{-2}$		1 $\qquad +\infty$
$f''(x)$	$+$ $\quad 0$	$-$	$+$
f	$\cup$ $\quad$ σ.κ.	$\cap$	$\cup$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0,e^{-2}\right]$ και $(1,+\infty)$

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[e^{-2},1\right)$.

Παρουσιάζει καμπή, για $x=e^{-2}$, με σημείο καμπής της C_f το $\left(e^{-2},-\dfrac{1}{2}\right)$

ii. Σύμφωνα με την προηγούμενη μελέτη, η γραφική παράσταση της f είναι:



iii. Είναι $f(e)=1$ και $f'(e)=-\frac{1}{e}$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f είναι: $(\varepsilon): y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e) \Leftrightarrow (\varepsilon): y-1=-\frac{1}{e}\cdot(x-e) \Leftrightarrow (\varepsilon): y=-\frac{1}{e}\cdot x+2$

- Το $e\in A_2=(1,+\infty)$ και η συνάρτηση f είναι κυρτή στο A_2, επομένως στο διάστημα αυτό, η γραφική της παράσταση είναι πάνω από την ευθεία (ε), εκτός του σημείου επαφής $P(e,1)$. Άρα το σημείο P είναι το μοναδικό κοινό σημείο των C_f και (ε), στο διάστημα $A_2=(1,+\infty)$
- Για κάθε $x\in A_1=(0,1) \Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow f(x)<0$,

  ενώ είναι $0<x<1 \Leftrightarrow 0>-\frac{1}{e}\cdot x>-\frac{1}{e} \Rightarrow 2>-\frac{1}{e}\cdot x+2>2-\frac{1}{e}>0$, οπότε είναι $f(x)<0<-\frac{1}{e}\cdot x+2 \Rightarrow f(x)<-\frac{1}{e}\cdot x+2$, δηλαδή η C_f είναι κάτω από την (ε), οπότε δεν έχουν κοινά σημεία στο διάστημα $A_1=(0,1)$.

Επομένως το σημείο επαφής $P(e,1)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο των C_f και (ε)

Δ5. Έστω η συνάρτηση $g(x)=2\cdot\eta\mu(x-2)-x\cdot(f(x)-1),\ x>1$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής, άρα είναι συνεχής και στο διάστημα $[2,e]$.

Επίσης, $g(2)=2\cdot\eta\mu 0-2\cdot(f(2)-1)=-2\cdot(f(2)-1)<0$, εφόσον είναι

$2<e\overset{f\downarrow(1,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(2)>f(e)\Leftrightarrow f(2)-1>0$ και $g(e)=2\cdot\eta\mu(e-2)>0$, εφόσον είναι

$0<e-2<\pi\Rightarrow\eta\mu(e-2)>0$. Άρα ισχύει: $g(2)\cdot g(e)<0$.

Άρα, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(2,e)$, τέτοιο ώστε

$$g(x_0)=0\Leftrightarrow 2\cdot\eta\mu(x_0-2)=x_0\cdot(f(x_0)-1)\underset{\eta\mu(x_0-2)>0}{\overset{f(x_0)>1}{\Leftrightarrow}}\frac{2}{f(x_0)-1}=\frac{x_0}{\eta\mu(x_0-2)}$$

($2<x_0<e\overset{f\downarrow[2,e]}{\Rightarrow} f(x_0)>f(e)\Rightarrow f(x_0)>1,\ 0<x_0-2<e-2<\pi\Rightarrow\eta\mu(x_0-e)>0$)

Δ6. Για κάθε $x>e$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[e,x]$ και παραγωγίσιμη στο (e,x). Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(e,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=\dfrac{\frac{1}{\ln x}-1}{x-e}$.

Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in A_2=(1,+\infty)$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο A_2. Τότε: $e<\xi<x\Rightarrow f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow\dfrac{\frac{1}{\ln x}-1}{x-e}<-\dfrac{1}{x\cdot\ln^2 x}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ln^2 x\cdot\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)<-\frac{x-e}{x}\Leftrightarrow\ln x\cdot(1-\ln x)<-\left(1-\frac{e}{x}\right)\Leftrightarrow\ln x\cdot(\ln x-1)>1-\frac{e}{x}$$

β΄τρόπος Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=(\ln x-1)\cdot\ln x-1+\frac{e}{x}$, $x>1$. Για κάθε $x>1$ είναι $\varphi'(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot(\ln x-1)-\frac{e}{x^2}=\frac{1}{x}\cdot(2\cdot\ln x-1)-\frac{e}{x^2}=\frac{x\cdot(2\cdot\ln x-1)-e}{x^2}$.

Τότε για κάθε $x>e\Leftrightarrow\ln x>1\Leftrightarrow 2\cdot\ln x>2\Leftrightarrow 2\cdot\ln x-1>1$, οπότε προκύπτει, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη, οτι $x\cdot(2\cdot\ln x-1)>e\Leftrightarrow\varphi'(x)>0$.

Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[e,+\infty)$. Τότε, για κάθε

$$x>e\Leftrightarrow\varphi(x)>\varphi(e)\Leftrightarrow\ln x\cdot(\ln x-1)-1+\frac{e}{x}>0\Leftrightarrow\ln x\cdot(\ln x-1)>1-\frac{e}{x}$$

Δ7.i. Η εφαπτομένη (ζ) της C_f στο σημείο της $M(\alpha,f(\alpha)),\alpha>1$ έχει εξίσωση $(\zeta): y-f(\alpha)=f'(\alpha)\cdot(x-\alpha)$ και διέρχεται από το σημείο $(x_A,0)$, επομένως

$$-f(\alpha)=f'(\alpha)\cdot(x_A-\alpha)\Leftrightarrow-\frac{1}{\ln\alpha}=-\frac{1}{\alpha\cdot\ln^2\alpha}\cdot(x_A-\alpha)\Leftrightarrow\alpha\cdot\ln\alpha=x_A-\alpha\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_A=\alpha+\alpha\cdot\ln\alpha\Leftrightarrow x_A=\alpha\cdot(1+\ln\alpha).$$

Όταν η τετμημένη του σημείου M μεταβάλλεται με ρυθμό $\alpha'(t)=2\alpha\,cm/s$, τότε

$$x_A(t)=\alpha(t)\cdot(1+\ln\alpha(t))\Rightarrow x_A'(t)=\alpha'(t)\cdot(1+\ln\alpha(t))+\alpha(t)\cdot\frac{1}{\alpha(t)}\cdot\alpha'(t)\Leftrightarrow.$$

$$\Leftrightarrow x_A'(t)=\alpha'(t)\cdot(1+\ln\alpha(t))+\alpha'(t)=\alpha'(t)\cdot(2+\ln\alpha(t))=2\alpha(t)\cdot(2+\ln\alpha(t)).$$

Τη χρονική στιγμή t_0, που η ευθεία (ζ) συμπίπτει με την ευθεία (ε), είναι $\alpha(t_0)=e$, επομένως $x_A'(t_0)=2\alpha(t_0)\cdot(2+\ln\alpha(t_0))=2e\cdot(2+\ln e)=6e\,cm/s$

ii. Είναι $\varepsilon\varphi\omega=f'(\alpha)\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=-\frac{1}{\alpha\cdot\ln^2\alpha}$

Όταν η τετμημένη του σημείου M μεταβάλλεται με ρυθμό $\alpha'(t)=2\alpha\,cm/s$, τότε

$$\varepsilon\varphi\omega(t)=-\frac{1}{\alpha(t)\cdot\ln^2\alpha(t)}=f'(\alpha(t))\Rightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\cdot\omega'(t)=f''(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\varepsilon\varphi^2\omega(t)\right)\cdot\omega'(t)=f''(\alpha(t))\cdot\alpha'(t).$$

Τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία $\alpha(t_0)=e$, είναι

$\left(1+\varepsilon\varphi^2\omega(t_0)\right)\cdot\omega'(t_0)=f''(\alpha(t_0))\cdot\alpha'(t_0)$, με την $\varepsilon\varphi\omega(t_0)=f'(e)=-\frac{1}{e}$ επομένως

$$\left(1+\frac{1}{e^2}\right)\cdot\omega'(t_0)=f''(e)\cdot 2e\Leftrightarrow\frac{e^2+1}{e^2}\cdot\omega'(t_0)=\frac{3}{e^2}\cdot 2e\Leftrightarrow\omega'(t_0)=\frac{6e}{e^2+1}\ \text{rad/s}$$

Δ8. Στο $(2,e)$, η εξίσωση $f'(x)=\frac{1-f(x)}{x-2}\Leftrightarrow f'(x)(x-2)=1-f(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)(x-2)+f(x)-1=0\Leftrightarrow\left(f(x)-1\right)'(x-2)+\left(f(x)-1\right)(x-2)'=0\quad(*)$$

Έστω η συνάρτηση $F(x)=\left(f(x)-1\right)(x-2),\ x>1$.

Η συνάρτηση F είναι συνεχής, άρα είναι συνεχής και στο διάστημα $[2,e]$

Η F είναι παραγωγίσιμη, άρα και στο $(2,e)$, με $F'(x)=f'(x)(x-2)+f(x)-1$

Επίσης είναι $F(2)=F(e)=0$.

Επομένως, από το θεώρημα Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(2,e)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\rho)=0\Leftrightarrow f'(\rho)(\rho-2)+f(\rho)-1=0\Leftrightarrow f'(\rho)(\rho-2)=1-f(\rho)\Leftrightarrow f'(\rho)=\frac{1-f(\rho)}{\rho-2}$$

δηλαδή η εξίσωση $f'(x)=\frac{1-f(x)}{x-2}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2,e)$

Δ9. Η συνάρτηση $f\left(e^x\right)\cdot f^2\left(x\right)=\frac{1}{\ln e^x}\cdot\frac{1}{\ln^2 x}=\frac{1}{x\cdot\ln^2 x}=-f'\left(x\right)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[e,e^2\right]$.

Επομένως ορίζεται το $I=\int_e^{e^2} f\left(e^x\right)\cdot f^2\left(x\right)dx=-\int_e^{e^2} f'\left(x\right)dx=\int_{e^2}^{e} f'\left(x\right)dx=$

$=\left[f\left(x\right)\right]_{e^2}^{e}=f\left(e\right)-f\left(e^2\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Δ10. Για κάθε $x>1$ ισχύει: $0<\ln x<x-1\Rightarrow\frac{1}{\ln x}>\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow\frac{x^2}{\ln x}>\frac{x^2}{x-1}$ και οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $\left[2,4\right]$,

άρα ισχύει $\int_2^4\frac{x^2}{\ln x}dx>\int_2^4\frac{x^2}{x-1}dx\Leftrightarrow\int_2^4 x^2\cdot f\left(x\right)dx>J$, όπου

$J=\int_2^4\frac{x^2}{x-1}dx=\int_2^4\frac{x^2-1+1}{x-1}dx=\int_2^4\frac{\left(x-1\right)\cdot\left(x+1\right)+1}{x-1}dx=\int_2^4\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx=$

$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4+\left(4-2\right)+\left[\ln\left|x-1\right|\right]_2^4=\frac{16-4}{2}+2+\ln 3=8+\ln 3.$

Άρα $\int_2^4 x^2\cdot f\left(x\right)dx>8+\ln 3$