ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2022

Α ΘΕΜΑ

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Να αποδείξετε οτι: Αν $f'(x)>0$ στο διάστημα (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. **(μον. 7)**

Α2.i. Να διατυπώσετε τον 1ο κανόνα (θεώρημα) de l' Hospital **(μον. 2)**

ii. Ποια είναι τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f στο διάστημα Δ; **(μον. 2)**

Α3. Έστω ο ισχυρισμός: «Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι αληθής ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. **(μον. 1)**

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.** **(μον. 3)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη **(μον. 5x2)**

α. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι $1-1$, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

β. Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1}.

γ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, και παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $f(x_1), f(x_2)$ με $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$, τότε παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.

δ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x \,/\, \eta\mu x = 0\}$ ισχύει: $(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Β ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 1 + \eta\mu x,\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ και η συνάρτηση h για την οποία ισχύει $x \cdot e^{h(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu(e\cdot x)}{x}$, για κάθε $x > 0$.

Β1. Να δείξετε οτι $h(x) = 1 - \ln x$, $x > 0$ και να ορίσετε τη συνάρτηση $f = h \circ g$

Για $\boxed{f(x)=1-\ln(1+\eta\mu x),\ -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2}}$

B2. Να δείξετε οτι $f(x)\ge 0$ και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

B3.i. Να δείξετε οτι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα

B4. Να δείξετε οτι η C_f τέμνει τη διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων ακριβώς σε ένα σημείο

(μον. 6+5+(4+4)+6)

Γ ΘΕΜΑ

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:A=(0,e]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f^2(x)+\ln x=\int_1^e \ln x\,dx$, για κάθε $x\in A$ και $f(1)=-1$.

Γ1. Να δείξετε οτι $f(x)=-\sqrt{1-\ln x},\ x\in A=(0,e]$

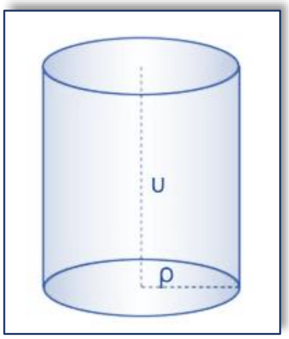
Γ2. Να δείξετε οτι ορίζεται η αντίστροφη της f την οποία και να προσδιορίσετε. Στη συνέχεια να δείξετε οτι $\int_{-1}^{0} f^{-1}(x)\,dx>\frac{5}{3}$

Γ3. Να δείξετε οτι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$, ώστε $(e-1)\cdot f'(\xi)=1$

Γ4. Να υπολογίσετε το $I=\int_1^e \frac{f^3(x)}{x}dx$ **(μον. 7+7+5+6)**

Δ ΘΕΜΑ

Μια βιομηχανία κατασκευάζει κυλινδρικά δοχεία σταθερού εμβαδού $E = 54\pi\ cm^2$ το καθένα.



Δ1.i. Να δείξετε οτι ο όγκος του δοχείου, σε συνάρτηση της ακτίνας της βάσης ρ δίνεται από τη σχέση $V(\rho) = \pi \cdot (27\rho - \rho^3),\ 0 < \rho < 3\sqrt{3}$

ii. Να δείξετε οτι ο μέγιστος όγκος του δοχείου είναι $54\pi\ cm^3$

Δ2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{\rho^2 + 4} - 2\right) \cdot \ln\rho}{V(\rho)}$

Δ3. Να δείξετε οτι για κάθε $\rho \in \left(0, 3\sqrt{3} - 1\right)$ ισχύει $V(\rho + 1) < V(\rho) + V'(\rho)$

Δ4. Να υπολογίσετε το $I = \int_1^2 \dfrac{18\pi}{V'(\rho)} d\rho$

(μον. (3+4)+6+5+7)

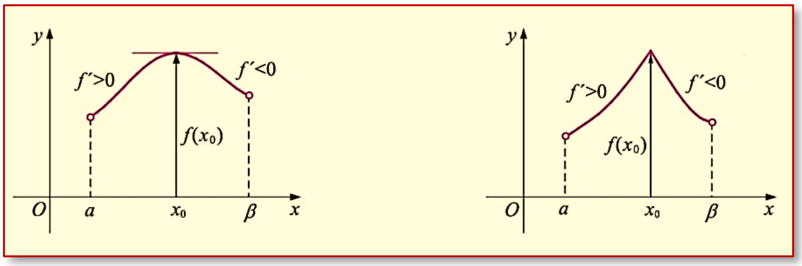
Καλή επιτυχία
Ν.ΨΑΘΑ
Μαθηματικός

ΛΥΣΕΙΣ

Α ΘΕΜΑ

Α1. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1)

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι



γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$. (2)

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει οτι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2.i. (Μορφή $\frac{0}{0}$) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

ii. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται, ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.

Α3. **α.** **Ψ**

β. Αντιπαράδειγμα Η συνάρτηση $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$ είναι συνεχής στο

$[-1,1]$ και $f(-1)=f(1)=1$. Αλλά δεν υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$, γιατί $f'(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-1,0)\\ 1, & x\in(0,1)\end{cases}$ και η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Α4.

α. Σ	β. Σ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Σ

Β ΘΕΜΑ

Β1. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(e\cdot x)}{x}=e\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(e\cdot x)}{e\cdot x}\overset{u=e\cdot x}{=}e\cdot\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=e\cdot 1=e$.

Τότε, για κάθε $x>0$, $x\cdot e^{h(x)}=e\Leftrightarrow\dfrac{e^{h(x)}}{e}=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow e^{h(x)-1}=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow h(x)-1=\ln\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(x)-1=-\ln x\Leftrightarrow h(x)=1-\ln x,\ x>0$

Το σύνολο $\left\{x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]/1+\eta\mu x>0\right\}=\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\neq\varnothing$. Άρα ορίζεται η $f=h\circ g$, με

$f(x)=h(g(x))=1-\ln g(x)=1-\ln(1+\eta\mu x),\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

Β2. Για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, ισχύει $\ln(1+\eta\mu x)\le 1+\eta\mu x-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\ln(1+\eta\mu x)\ge-\eta\mu x\Leftrightarrow 1-\ln(1+\eta\mu x)\ge 1-\eta\mu x\Leftrightarrow f(x)\ge 1-\eta\mu x\ge 0$

Το $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\left[1-\ln(1+\eta\mu x)\right]\overset{u=1+\eta\mu x}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}(1-\ln u)=-(-\infty)=+\infty$, επομένως η ευθεία $x=-\dfrac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $A=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, άρα η γραφική της παράσταση δεν έχει άλλες ασύμπτωτες

Β3.i. Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, είναι $f'(x)=-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}$.

Επίσης, το $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1-\ln(1+\eta\mu x)-1+\ln 2}{x-\frac{\pi}{2}}=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-\ln(1+\eta\mu x)+\ln 2}{x-\frac{\pi}{2}}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=0$, άρα $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη, με $f'(x)=-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}$, $x\in A=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

ii. Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, είναι $\sigma\upsilon\nu x>0$ και $1+\eta\mu x>0$, άρα $f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, είναι $f''(x)=-\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}\right)'=-\frac{-\eta\mu x\cdot(1+\eta\mu x)-\sigma\upsilon\nu^2 x}{(1+\eta\mu x)^2}=$

$=\frac{\eta\mu x+\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{(1+\eta\mu x)^2}=\frac{\eta\mu x+1}{(1+\eta\mu x)^2}=\frac{1}{1+\eta\mu x}>0$, άρα η η συνάρτηση f είναι κυρτή

Β4. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-x,\ x\in A=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, εφόσον $\varphi'(x)=f'(x)-1<0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα είναι συνεχής και στο διάστημα $[0,1]$ και επίσης ισχύουν: $\varphi(0)=f(0)=1>0$, $\varphi(1)=1-\ln(1+\eta\mu 1)-1=-\ln(1+\eta\mu 1)<0$ (Εφόσον είναι $\eta\mu 1>0 \Leftrightarrow 1+\eta\mu 1>1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln(1+\eta\mu 1)>0$). Άρα $\varphi(0)\cdot\varphi(1)<0$.

Τότε, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$. Η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, άρα το x_0 είναι μοναδικό. Άρα η C_f τέμνει τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων $y=x$ ακριβώς σε ένα σημείο, με $x_0 \in (0,1)$

Γ ΘΕΜΑ

Γ1. Είναι $\int_1^e \ln x dx=[x\cdot\ln x]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=e-\int_1^e 1dx=e-(e-1)=1$, άρα για κάθε $x\in A$, $f^2(x)+\ln x=1 \Leftrightarrow f^2(x)=1-\ln x$.

Η σχέση $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$, άρα είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,e)$ και η f είναι συνεχής, επομένως διατηρεί πρόσημο στο $(0,e)$. Είναι $f(1)=-1$, άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,e)$. Τότε από τη σχέση :

$$f^2(x)=1-\ln x \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{1-\ln x} \Leftrightarrow -f(x)=\sqrt{1-\ln x} \Leftrightarrow f(x)=-\sqrt{1-\ln x},\ x\in(0,e)$$

και $f(1)=-1$, άρα τελικά $f(x)=-\sqrt{1-\ln x},\ x\in A=(0,e]$

Γ2. Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{1-\ln x}}>0$ και η f είναι συνεχής. Άρα είναι γνησίως αύξουσα, επομένως είναι και $1-1$. Τότε ορίζεται η αντίστροφή της, στο $D_{f^{-1}}=f(A)$. Το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-\ln x}\overset{1-\ln x=u}{=}-\lim\limits_{u\to+\infty}\sqrt{u}=-\infty$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x), f(e)\right]=(-\infty,0]$. Άρα το $D_{f^{-1}}=(-\infty,0]$

Έστω $f(x)=y\le 0\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.

Τότε $-\sqrt{1-\ln x}=y\Leftrightarrow 1-\ln x=y^2\Leftrightarrow \ln x=1-y^2\Leftrightarrow x=e^{1-y^2}$, άρα

$f^{-1}(y)=e^{1-y^2},\ y\le 0\Leftrightarrow f^{-1}(x)=e^{1-x^2},\ x\le 0$

Η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής και για κάθε $x\in[-1,0]$ ισχύει η ανισοϊσότητα $e^{1-x^2}\ge 1-x^2+1\Leftrightarrow e^{1-x^2}\ge 2-x^2\Leftrightarrow f^{-1}(x)\ge 2-x^2$, με την ισότητα μόνο για $x=-1$

επομένως είναι $\int_{-1}^{0} f^{-1}(x)dx>\int_{-1}^{0}(2-x^2)dx=2(0+1)-\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}=2-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$

Γ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,e)$. Άρα, από το θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(e)-f(1)}{e-1}\Leftrightarrow (e-1)\cdot f'(\xi)=1$

Γ4. Η συνάρτηση $\dfrac{f^3(x)}{x}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$, άρα ορίζεται το

$I=\int_1^e \dfrac{f^3(x)}{x}dx=-\int_1^e \dfrac{\left(\sqrt{1-\ln x}\right)^3}{x}dx$.

Θέτω $1-\ln x = u \Rightarrow -\frac{1}{x}dx = du$ Για $x=1 \Rightarrow u=1$ και για $x=e \Rightarrow u=0$. Τότε το

$$I = \int_1^0 \left(\sqrt{u}\right)^3 du = -\int_0^1 u^{\frac{3}{2}} du = -\left[\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right]_0^1 = -\frac{2}{5}$$

Δ ΘΕΜΑ

Δ1.i. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $E = 2\pi\rho\cdot\upsilon + 2\pi\rho^2 \Leftrightarrow 54\pi = 2\pi\cdot\left(\rho\cdot\upsilon+\rho^2\right) \Leftrightarrow \rho\cdot\upsilon+\rho^2 = 27 \Leftrightarrow \upsilon = \frac{27-\rho^2}{\rho}$, με $\rho>0$ και $\upsilon>0 \Leftrightarrow \rho^2<27 \Leftrightarrow 0<\rho<3\sqrt{3}$.

Επομένως ο όγκος του κυλίνδρου, που δίνεται από τον τύπο $V = E_\beta\cdot\upsilon = \pi\rho^2\cdot\upsilon$, σαν συνάρτηση της ακτίνας της βάσης είναι :

$$V(\rho) = \pi\rho^2\cdot\frac{27-\rho^2}{\rho} \Leftrightarrow V(\rho) = \pi\rho\cdot\left(27-\rho^2\right) = \pi\cdot\left(27\rho-\rho^3\right), 0<\rho<3\sqrt{3}$$

ii. Για κάθε $\rho\in\left(0,3\sqrt{3}\right)$ είναι $V'(\rho) = \pi\cdot\left(27-3\rho^2\right) = -3\pi\cdot\left(\rho^2-9\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V'(\rho) = -3\pi\cdot(\rho+3)\cdot(\rho-3)$.

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων της $V'(\rho)$ και μονοτονίας της V, η συνάρτηση V είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο

ρ	0	3	$3\sqrt{3}$
$V'(\rho)$	$+$	0	$-$
V	$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$

$\left[3,3\sqrt{3}\right)$. Επομένως παρουσιάζει μέγιστο για $\rho=3$, ίσο με $V(3)=\pi\cdot(27\cdot 3-27)=2\pi\cdot 27=54\pi\ \text{cm}^3$. Δηλαδή, ο μέγιστος όγκος του δοχείου είναι $54\pi\ \text{cm}^3$

Δ2. Είναι $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{\rho^2+4}-2\right)\cdot\ln\rho}{V(\rho)}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{\rho^2+4}-2\right)\cdot\ln\rho}{\pi\left(27\rho-\rho^3\right)}=$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\left(\sqrt{\rho^2+4}-2\right)\left(\sqrt{\rho^2+4}+2\right)\cdot\ln\rho}{\pi\left(27\rho-\rho^3\right)\left(\sqrt{\rho^2+4}+2\right)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cdot\ln\rho}{\pi\rho\left(27-\rho^2\right)\left(\sqrt{\rho^2+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\cdot\ln\rho}{\pi\left(27-\rho^2\right)\left(\sqrt{\rho^2+4}+2\right)}=\frac{0}{27\pi\cdot 4}=0,$$

εφόσον $\lim\limits_{\rho\to 0}(\rho\cdot\ln\rho)=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\ln\rho}{\frac{1}{\rho}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\frac{1}{\rho}}{-\frac{1}{\rho^2}}=\lim\limits_{\rho\to 0}(-\rho)=0$

Δ3. Για κάθε $\rho\in\left(0,3\sqrt{3}\right)$ ισχύει $V''(\rho)=-3\pi\cdot 2\rho=-6\pi\rho<0$, άρα η συνάρτηση $V'(\rho)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Έστω τυχαίο $\rho\in\left(0,3\sqrt{3}-1\right)\Leftrightarrow\rho+1\in\left(1,3\sqrt{3}\right)$.

Η συνάρτηση V είναι συνεχής στο διάστημα $[\rho,\rho+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(\rho,\rho+1)$. Τότε, από το θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho,\rho+1)$, τέτοιο ώστε $V'(\xi)=\dfrac{V(\rho+1)-V(\rho)}{\rho+1-\rho}=V(\rho+1)-V(\rho)$.

Είναι $\rho<\xi<\rho+1 \overset{V'\downarrow}{\Leftrightarrow} V'(\rho)>V'(\xi)>V'(\rho+1) \Rightarrow V'(\rho)>V(\rho+1)-V(\rho)$, άρα τελικά $V(\rho+1)<V(\rho)+V'(\rho)$

Δ4. Η συνάρτηση $\dfrac{18\pi}{V'(\rho)}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$. Άρα ορίζεται το

$$I=\int_1^2 \frac{18\pi}{V'(\rho)}d\rho=\int_1^2 \frac{18\pi}{-3\pi(\rho^2-9)}d\rho=-\int_1^2 \frac{6}{\rho^2-9}d\rho=-\int_1^2 \frac{6}{(\rho-3)(\rho+3)}d\rho=$$

$$=-\int_1^2 \frac{(\rho+3)-(\rho-3)}{(\rho-3)(\rho+3)}d\rho=-\int_1^2 \frac{1}{\rho-3}d\rho+\int_1^2 \frac{1}{\rho+3}d\rho=-\big[\ln|\rho-3|\big]_1^2+\big[\ln|\rho+3|\big]_1^2=$$

$$=-(0-\ln2)+\ln5-\ln4=\ln2+\ln5-2\ln2=\ln\frac{5}{2}$$