ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ ΕΠΑΛ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2022

Α ΘΕΜΑ

Α1. Ποια από τα παρακάτω μεγέθη είναι μέτρα θέσης και ποια είναι μέτρα διασποράς;

α. Μέση τιμή **β.** Τυπική απόκλιση **γ.** Διάμεσος

δ. Διακύμανση **ε.** Εύρος

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο πεδίο ορισμού της A

Α3. Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της στήλης A με την παράγωγό τους στη στήλη B:

Στήλη **Α** Συνάρτηση	Στήλη **Β** Παράγωγος
α. $\sigma\upsilon\nu x$	**1.** $\eta\mu x$
β. $2\sqrt{x}$	**2.** $3x^2$
γ. $\eta\mu x$	**3.** $-\eta\mu x$
δ. x^3	**4.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	5. $\frac{1}{\sqrt{x}}$
	6. $\sigma\upsilon\nu x$

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή **(Σ)**, ή Λάθος **(Λ)**

α. Ισχύει ο τύπος $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$, όπου $f(x), g(x)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $g(x)\neq 0$

β. Η παράγωγος της συνάρτησης f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x, όταν $x=x_0$

γ. Αν $f_i\ ,i=1,2,...,\kappa$ είναι οι συχνότητες των τιμών $x_i\ ,i=1,2,...,\kappa$ αντίστοιχα μιας μεταβλητής X , τότε ισχύει $f_1+f_2+...+f_\kappa=\kappa$

δ. Ο συντελεστής μεταβολής ενός δείγματος τιμών μιας οποιασδήποτε μεταβλητής X ορίζεται για $s\neq 0$ από τον λόγο $CV=\frac{\bar{x}}{s}$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση

ε. Σε μια κανονική, ή περίπου κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με 6 τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R\approx 6s$

(μον 10+3+2+5x2)

Β ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2-f\left(\sqrt{2}\right)}$

Β1. Να δείξετε οτι $f\left(\sqrt{2}\right)=1$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

Β2. Να δείξετε οτι $f\left(\sqrt{2}+x\right)=\sqrt{x^2+2\sqrt{2}x+1}$

Β3. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(\sqrt{2}+h\right)-1}{h}$

Β4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=\sqrt{2}$

(μον 7+6+5+7)

Γ ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+3,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=\dfrac{1}{4}$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^3-4x^2+x+6\right)\cdot \eta\mu\left(-\dfrac{\pi x}{2}\right)}{x^2-x-2}=2\alpha$

Γ1. Να δείξετε οτι $\alpha=-2$ και $\beta=1$

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Γ3. Να βρείτε το διάστημα (ή τα διαστήματα), στο οποίο η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$

Γ4. Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τις τιμές : $f(\pi), f(4), f\left(\dfrac{7}{3}\right)$

Γ5. Να δείξετε οτι η εξίσωση $-2x^2+x-2=\sigma\upsilon\nu x$ είναι αδύνατη

(μον 7+6+5+4+3)

Δ ΘΕΜΑ

Κατά τον μήνα **Νοέμβριο**, σε μια ορεινή περιοχή, μετρήθηκαν οι μέσες ημερήσιες θερμοκρασίες. Στον παρακάτω ημιτελή πίνακα παρουσιάζονται κατανεμημένες, σε 4 ισοπλατείς κλάσεις.

Κλάσεις	x_i	ν_i	N_i	f_i	$F_i\%$
[-4,)					
[, 0)					
[,)					
[,)					
	σύνολο				

Δίνεται οτι:

- Η μέση τιμή τους ήταν $\bar{x} = 1^{\circ}\ C$
- Η συχότητα της 2ης κλασης είναι 3-πλάσια από τη συχνότητα της 1ης
- Η συχνότητα της 4ης κλάσης είναι 5-πλάσια από τη συχνότητα της 3ης

Δ1. Να δείξετε οτι το πλάτος κάθε κλάσης είναι $c = 2$

Δ2. Να δείξετε οτι $\nu_1 = \nu_3 = 3$

Δ3. Να συμπληρώσετε όλες τις στήλες του πίνακα. Ποιο το ποσοστό των ημερών που η θερμοκρασία δεν ήταν κάτω από το μηδεν; Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων

Δ4. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. Έστω οτι κατά τον μήνα Απρίλιο κάθε μέση θερμοκρασία αυξάνεται κατά $6^{\circ}\ C$. Να υπολογίσετε τη νέα μέση τιμή και τυπική απόκλιση

(μον 4+6+6+4)

Καλή επιτυχία
Ν.ΨΑΘΑ
Μαθηματικός

ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ ΕΠΑΛ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2022

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ

Α ΘΕΜΑ

Α1.

Μέτρα θέσης	**α**	**γ**	
Μέτρα διασποράς	**β**	**δ**	**ε**

Α2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Α3.

α. **3**	β. **5**	γ. **6**	δ. **2**

Α4.

α. **Λ**	β. **Σ**	γ. **Λ**	δ. **Λ**	ε. **Σ**

Β ΘΕΜΑ

Β1. Από τη σχέση $f(x)=\sqrt{x^2-f\left(\sqrt{2}\right)}$ προκύπτει οτι $f(x)\geq 0$ και για $x=\sqrt{2}$ το $f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{\sqrt{2}^2-f\left(\sqrt{2}\right)} \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2-f\left(\sqrt{2}\right)}\geq 0 \Leftrightarrow f^2\left(\sqrt{2}\right)=2-f\left(\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f^2\left(\sqrt{2}\right)+f\left(\sqrt{2}\right)-2=0$. Θέτω $\omega=f\left(\sqrt{2}\right)$. Τότε η εξίσωση $\omega^2+\omega-2=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=1+8=9$ και ρίζες $\omega_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\left\langle \begin{array}{l} 1:\text{δεκτή} \\ -2:\text{απορ} \end{array}\right.$. Έτσι $\omega=f\left(\sqrt{2}\right)=1$

Τότε ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ και ορίζεται όταν $x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}\geq 1 \Leftrightarrow |x|\geq 1 \Leftrightarrow x\leq -1,\ ή\ x\geq 1$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

B2. Είναι $f\left(\sqrt{2}+x\right)=\sqrt{\left(\sqrt{2}+x\right)^2-1}=\sqrt{2+2\sqrt{2}x+x^2-1}=\sqrt{x^2+2\sqrt{2}x+1}$

B3. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(\sqrt{2}+h\right)-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{h^2+2\sqrt{2}h+1}-1}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{h^2+2\sqrt{2}h+1}-1\right)\left(\sqrt{h^2+2\sqrt{2}h+1}+1\right)}{h\left(\sqrt{h^2+2\sqrt{2}h+1}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2\sqrt{2}h+1-1}{h\left(\sqrt{h^2+2\sqrt{2}h+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2\sqrt{2}h}{h\left(\sqrt{h^2+2\sqrt{2}h+1}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(h+2\sqrt{2}\right)}{h\left(\sqrt{h^2+2\sqrt{2}h+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h+2\sqrt{2}}{\sqrt{h^2+2\sqrt{2}h+1}+1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

B4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=\sqrt{2}$ είναι της μορφής: $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$, με $\lambda=f'\left(\sqrt{2}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(\sqrt{2}+h\right)-f\left(\sqrt{2}\right)}{h}=\sqrt{2}$, άρα $(\varepsilon): y=\sqrt{2}x+\beta$.

Το σημείο $\left(\sqrt{2},1\right)\in C_f \Leftrightarrow 1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\beta \Leftrightarrow 1=2+\beta \Leftrightarrow \beta=-1$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $(\varepsilon): y=\sqrt{2}x-1$

Γ ΘΕΜΑ

Γ1. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+3,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x)=2\alpha x+\beta$ και παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=\frac{1}{4}$, επομένως ισχύει ότι $f'\left(\frac{1}{4}\right)=0\Leftrightarrow 2\alpha\cdot\frac{1}{4}+\beta=0\Leftrightarrow \beta=-\frac{\alpha}{2}\ (1)$.

Το $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-4x^2+x+6)\cdot\eta\mu\left(-\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2-x-2}\overset{\text{Horner}}{=}\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)\cdot(x^2-5x+6)\cdot\eta\mu\left(-\frac{\pi x}{2}\right)}{(x+1)\cdot(x-2)}=$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2-5x+6)\cdot\eta\mu\left(-\frac{\pi x}{2}\right)}{x-2}=\frac{12\cdot\eta\mu\frac{\pi}{2}}{-3}=-4\cdot1=-4.$$

Άρα είναι $2\alpha=-4\Leftrightarrow\alpha=-2$ και τότε από τη σχέση (1) προκύπτει οτι $\beta=1$

1	-4	1	6	-1
	-1	5	-6	
1	-5	6	0	

Γ2. Για $\alpha=-2$ και $\beta=1$, η συνάρτηση είναι $f(x)=-2x^2+x+3,\ x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=-4x+1$. Επομένως είναι

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow -4x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$
- $f(x)<0\Leftrightarrow -4x+1<0\Leftrightarrow -4x<-1\Leftrightarrow x>\frac{1}{4}$ και
- $f(x)>0\Leftrightarrow -4x+1>0\Leftrightarrow -4x>-1\Leftrightarrow x<\frac{1}{4}$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$. Παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο $x_0 = \frac{1}{4}$, το $f\left(\frac{1}{4}\right) = -2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + 3 = -\frac{2}{16} + \frac{1}{4} + 3 = \frac{-1+2+24}{8} = \frac{25}{8}$

Γ3. Η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν $f(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 3 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{3}{2}$.

x	$-\infty$	-1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-2x^2 + x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

Άρα η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

Γ4. Είναι: $1 < \frac{7}{3} < \pi < 4$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$, άρα τελικά είναι $f(4) < f(\pi) < f\left(\frac{7}{3}\right)$

Γ5. Η εξίσωση $-2x^2 + x - 2 = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow -2x^2 + x - 2 + 5 = \sigma\upsilon\nu x + 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2x^2 + x + 3 = \sigma\upsilon\nu x + 5 \Leftrightarrow f(x) = \sigma\upsilon\nu x + 5$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1 \Leftrightarrow 4 \le \sigma\upsilon\nu x + 5 \le 6$. Αντίθετα, η συνάρτηση f παίρνει μέγιστη τιμή το $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{8}$, άρα είναι $f(x) \le \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$.

Επομένως η εξίσωση $-2x^2 + x - 2 = \sigma\upsilon\nu x$ είναι αδύνατη

Δ ΘΕΜΑ

Δ1. Αν c είναι το πλάτος κάθε κλάσης, τότε η 1η κλαση είναι $\left[-4,-4+c\right)$ και η 2η είναι $\left[-4+c,-4+2c\right)$. Άρα $-4+2c=0 \Leftrightarrow 2c=4 \Leftrightarrow c=2$

Δ2. Σύμφωνα με τα δεδομένα, οι πρώτες 3 στήλες του πίνακα (ο μήνας Νοέμβριος έχει 30 ημέρες) παίρνουν τη μορφή:

Κλάσεις	x_i	ν_i
[-4,-2)	-3	ν_1
[-2, 0)	-1	$3\nu_1$
[0, 2)	1	ν_3
[2, 4)	3	$5\nu_3$
	σύνολο	30

Έτσι είναι: $4\nu_1+6\nu_3=30 \Leftrightarrow 2\left(2\nu_1+3\nu_3\right)=30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\nu_1+3\nu_3=15 \Leftrightarrow \nu_3=\dfrac{15-2\nu_1}{3}$ (1) και

$$\bar{x}=1^{\circ} \Leftrightarrow \frac{-3\cdot\nu_1+(-1)\cdot 3\nu_1+1\cdot\nu_3+3\cdot 5\nu_3}{30}=1 \Leftrightarrow -6\nu_1+16\nu_3=30 \Leftrightarrow -3\nu_1+8\nu_3=15$$

οπότε λόγω της σχέσης (1) προκύπτει

$$-3\nu_1+8\frac{15-2\nu_1}{3}=15 \Leftrightarrow -9\nu_1+8\left(15-2\nu_1\right)=45 \Leftrightarrow -9\nu_1+120-16\nu_1=45 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -25\nu_1=-75 \Leftrightarrow \nu_1=\dfrac{-75}{-25} \Leftrightarrow \nu_1=3$, οπότε από την (1), $\nu_2=3$

Δ3. Σύμφωνα με τα δεδομένα και τα στοιχεία που έχουν προκύψει, ο πίνακας συμπληρώνεται:

Κλάσεις	x_i	ν_i	N_i	f_i	$F_i\%$
[-4,-2)	-3	3	3	0.1	10
[-2, 0)	-1	9	12	0.3	40
[0, 2)	1	3	15	0.1	50
[2, 4)	3	15	30	0.5	100
	σύνολο	30		1	

Άρα οι θερμοκρασίες δεν ήταν κάτω από το μηδέν το $f_3+f_4=0,6=60\%$ των ημερών του μήνα

Για το κυκλικό διάγραμμα, οι γωνίες είναι $\alpha_1=f_1\cdot 360^\circ=0,1\cdot 360^\circ=36^\circ=\alpha_3$ $\alpha_2=f_2\cdot 360^\circ=0,3\cdot 360^\circ=108^\circ$ και $\alpha_4=f_4\cdot 360^\circ=0,5\cdot 360^\circ=180^\circ$

Δ4. Η διακύμανση των παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο

$$s^2=\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\cdot \nu_i=\frac{(-3-1)^2\cdot 3+(-1-1)^2\cdot 9+(1-1)^2\cdot 3+(3-1)^2\cdot 15}{30}=$$

$=\dfrac{16\cdot 3+4\cdot 9+0\cdot 3+4\cdot 15}{30}=\dfrac{48+36+60}{30}=\dfrac{144}{30}=\dfrac{48}{10}=4,8$, άρα η τυπική απόκλιση ισούται με $s=\sqrt{4,8}\simeq 2,2^\circ\ C$

Έστω X η μεταβλητή που δίνει τις μέσες θερμοκρασίες των ημερών του μήνα Νοεμβρίου και Y η μεταβλητή που δίνει τις μέσες θερμοκρασίες των ημερών τον μήνα Απριλίο.

Τότε είναι $y_i=x_i+6$, οπότε $\bar{y}=\bar{x}+6=1+6=7^\circ\ C$ και η νέα τυπική απόκλιση είναι $s_y=s_x=2,2^\circ\ C$